Verslag van de 90e Europese Studiegroup
Wiskunde met de Industrie

SWI 2013

Leiden, 28 januari t/m 1 februari 2013

Auteurs:

Ionica Smeets	`ionica.nl`
Bennie Mols	`benniemols.blogspot.nl`

Editors:

Markus Heydenreich
Sander Hille
Vivi Rottschäfer
Flora Spieksma
Evgeny Verbitskiy

Inhoud

Voorwoord

Deze proceedings zijn een verslag van de 90e Europese *Studiegroup Wiskunde met de Industrie*, die van 26 januari t/m 1 februari 2013 op het Lorentz Center in Leiden werd gehouden. Tijdens deze week hebben de 60 deelnemers zich gebogen over zes problemen die door industriële partners zijn aangedragen.

Deze proceedings bestaan uit twee delen, die als twee losse boekjes zijn uitgebracht. Dit eerste deel, dat in het Nederlands is geschreven, is gericht op een algemeen publiek. Wetenschapsjournalisten Ionica Smeets en Bennie Mols schetsen een fraai beeld van zowel de uitdagingen waar de deelnemers voor gesteld werden als de oplossingen die zij bedachten.

Het tweede deel is geschreven voor een wetenschappelijk publiek en in het Engels gesteld. Hierin doen de deelnemers zelf verslag van hun bevindingen, vergezeld van alle overwegingen en details.

De organisatoren van SWI 2013
M. Heydenreich, S. Hille, V. Rottschäfer, F. Spieksma, E. Verbitskiy

Hoofdstuk 1

Begrip van een zaadje

Ionica Smeets

Hoe beschrijf je de processen in een ontkiemend zaadje? Met die vraag kwam het bedrijf *Fytagoras* naar de studiegroep. Er blijkt verrassend weinig bekend over wat er allemaal precies gebeurt in een zaadje en de wiskundigen verzamelen zoveel mogelijk biologische data voor ze een model maken. Uiteindelijk lukt het hen om verschillende modellen te maken die het zuurstofgebruik van een zaadje tijdens het ontkiemen beschrijven.

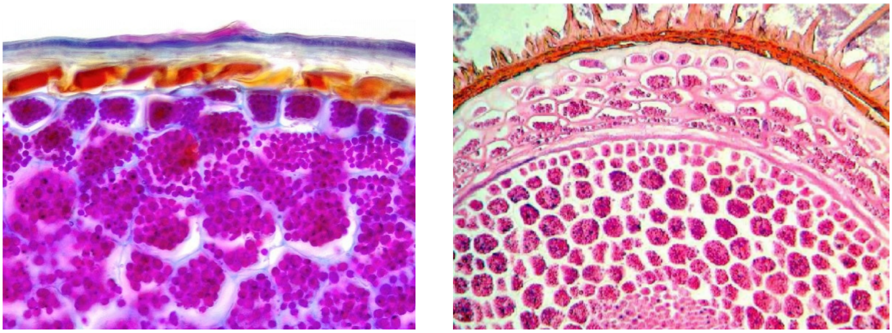
Fytagoras is een dynamisch wetenschappelijk bedrijf met veel expertise op het gebied van sensor technologie, zaden en het telen van gewassen. Het test bijvoorbeeld de kwaliteit van een partij zaad voor kwekers met hun speciaal ontwikkelde Q2-machine die het zuurstofgebruik van een zaadje tijdens het ontkiemen meet. Fytagoras presenteert aan het begin van de studiegroep meetgegevens van drie soorten zaad: gerst, suikerbiet en savooiekool.

Het is alleen lastig om deze meetdata te vertalen naar begrip van wat er binnen in het zaadje allemaal gebeurt. Er is namelijk nog weinig bekend over de verschillende processen die tijdens het ontkiemen zuurstof gebruiken. Het is een complexe combinatie van allerlei biologische processen waarover nog niet zoveel details bekend zijn.

Om een volgende stap te maken in hun analyses, wil Fytagoras graag een model dat het zuurstofgebruik van een ontkiemend zaadje beschrijft in termen van eigenschappen van het zaadje en de processen die zich daarin afspelen. Het bedrijf hoopt zo meer inzicht te krijgen in hoe bijvoorbeeld een beschermlaag rond een zaadje het kiemproces beïnvloedt. Nu krijgen alleen exclusieve zaden zo'n voorbehandeling om voor een hogere opbrengst te zorgen. Als er nieuwe, goedkopere technieken komen, kunnen die ook worden toegepast op veel voorkomende zaden als rijst. De hogere opbrengst van de zaden, zorgt dan voor meer voedsel en uiteindelijk minder hongersnood. Kortom: Fytagoras heeft hoge verwachtingen van de studiegroep.

Biologische kennis. De wiskundigen duiken eerst in de biologische literatuur om te begrijpen hoe een zaadje er precies uitziet. Linda Wiegman, student aan de Technische Universiteit Delft, belandde bij de studiegroep toen ze op zoek was naar een interessant bachelor-project bij een bedrijf dat wiskunde in de praktijk toepast. ÒIk vond het heel leuk dat er bij deze vraag zoveel biologie kwam kijken. We moesten onze kennis echt vanaf nul opbouwen om tot een goed model te komen.Ó

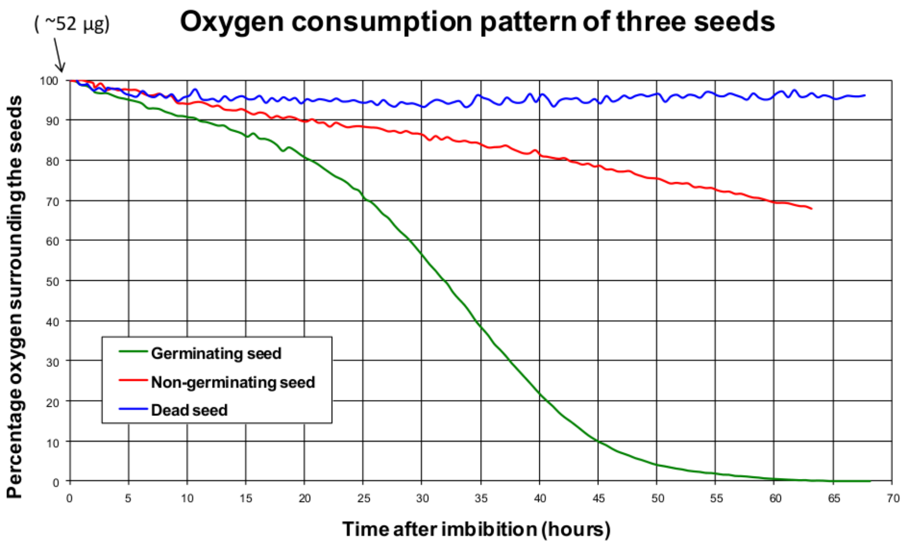
Hoe een zaadje er van binnen precies uitziet, verschil sterk van soort tot soort. Zo is gerst een eenzaadlobbige met reservevoedsel voor de embryo in het kiemwit. Suikerbiet en savooiekool zijn dan weer tweezaadlobbigen waarbij het reservevoedsel van het kiemwit is overgaan in de zaadlobben. In elk geval bevat elk zaadje een embryo dat zal uitgroeien tot een nieuwe plant. Ook is er in één of andere vorm van reservevoedsel dat het embryo kan gebruiken om te groeien. Tenslotte zit aan de buitenkant de zaadhuid die het embryo beschermt tegen schade en uitdroging.



Figuur 1.1: De zaadhuid kan er bij verschillende soorten heel anders uitzien. Links die van de papaver met een dichte zetmeellaag, rechts de kruisbes met veel meer ruimte tussen de cellen. De structuur van de zaadhuid bepaalt mede hoe snel een zaadje zuurstof op kan nemen.

Voordat een zaadje kan ontkiemen, moet het eerst water opnemen. De cellen in een zogenaamd slapend, droog zaadje bevatten nauwelijks water, terwijl een typische plantencel voor pakweg 70% uit water bestaat. Alleen cellen met voldoende water kun zich uiteindelijk delen om voor groei te zorgen. Bij de eerste fase van het ontkiemen, nemen de cellen in het zaadje dus water op en nemen hun oorspronkelijke vorm aan. Na de water-opname is er zuurstof nodig: zowel voor de interne reparaties als voor het groeien van de embryo. De eerste fase van het ontkiemen is voltooid zodra het kiemplantje door de zaadhuid breekt. Het doel van team Fytagoras is om het zuurstofgebruik in deze fase goed te modelleren.

Fytagoras meet het zuurstofgebruik van de zaadjes in hun speciale Q2-scanner. Elk zaadje zit in een klein buisje met een zuurstofgevoelige fluorescerende laag. Door een gekleurde lichtpuls in het buisje te sturen en de reflectie te meten, is op elk moment



Figuur 1.2: Drie typische grafieken van zuurstofgebruik zoals Fytogaras ze meet met hun Q2-machine. Op de verticale as staat hoeveel zuurstof er na verloop van tijd aanwezig is bij de zaadjes. De grafieken laten duidelijk het verschil zien tussen dode, slapende en kiemende zaden. Dode zaden gebruiken geen zuurstof, en slapende zaden een beetje. Kiemende zaden gebruiken eerst een kleine hoeveelheid zuurstof tijdens de water-opname en reparatie, het grote gebruik komt daarna door de celdeling bij groei.

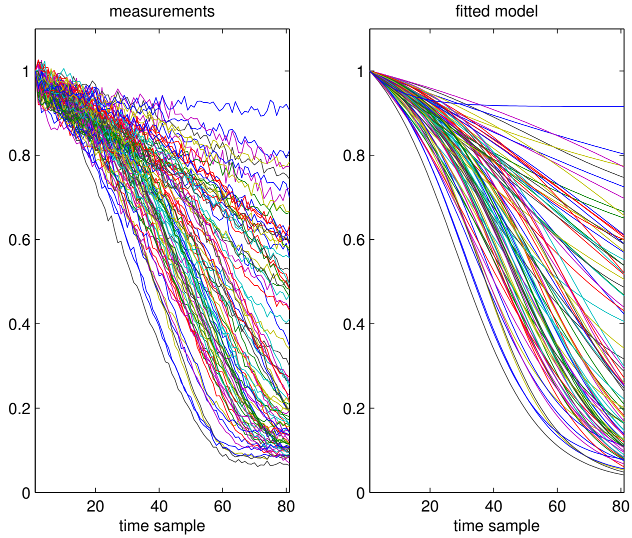
te bepalen hoeveel zuurstof er nog in het buisje zit. De meting begint bij het water opnemen van het zaadje en stopt zodra het embryo door de zaadhuid barst.

Een eenvoudig model. De aangeleverde meetgegevens van ontkiemende gerst, suikerbiet en savooiekool hebben allemaal dezelfde vorm als in de bovenstaande grafiek: eerst daalt de hoeveelheid zuurstof langzaam, dan treedt er een versnelling op en aan het eind gaat de afname weer trager.

Dat deze omgekeerde S-vorm steeds opduikt, betekent dat een algemeen biologisch proces het zuurstofgebruik bepaalt, onafhankelijk van de precieze structuur van een zaadje. Voor een eerste model nemen de wiskundigen daarom aan dat zuurstof in het zaadje voornamelijk gebruikt wordt door de mitochondriën: de energiecentrales van cellen. Ook nemen ze aan dat de zuurstof veel sneller door de celwand kan komen dan de mitochondriën haar verbruikt.

Nu modelleren ze alle mitochondriën in een cel samen als één bacteriekolonie. Daarvan weten we vrij goed hoe hij zich gedraagt: de snelheid van voortplanten is evenredig met het totale aantal bacteriën. De maximale grootte die een kolonie kan bereiken is begrensd door de hoeveelheid zuurstof die beschikbaar is.

Met deze aannames stellen de wiskundigen een zogenaamde logistische vergelijking op voor het aantal mitochondriën dat er op een bepaald moment aanwezig is in het zaadje. Deze logistische vergelijking beschrijft overigens zeer uiteenlopende processen: bijvoorbeeld hoe populaties zich ontwikkelen, maar ook hoe tumoren groeien of hoe talen in de loop der tijd veranderen. Vervolgens kunnen de wiskundigen uit de oplossing van deze bekende vergelijking stap voor stap afleiden hoe het zuurstofgebruik eruit ziet.



Figuur 1.3: Vergelijking van het model met de werkelijkheid. Het linkerplaatje geeft het zuurstofgebruik van 91 losse gerstzaden. Het rechterplaatje geeft de resultaten van het model op basis van de logistieke functie.

De anatomie van een zaadje. Het doel van Fytagoras was echter om het zuurstofgebruik beter te begrijpen in termen van allerlei eigenschappen van het zaad. Het logistische model neemt echter helemaal geen specifieke informatie mee over de zaadstructuur. Daarom gaan de wiskundigen verder met een tweede model op basis van de anatomie van een zaadje en de processen die zich daarin afspelen.

De belangrijkste vier processen bij het ontkiemen zijn het water opnemen, zuurstofdiffusie van buiten de zaadhuid tot helemaal in de embryo, de gasstofwisseling van cellen in het zaadje en tenslotte de celdeling in de embryo. Sommige daarvan zijn veel korten dan anderen.

De fase van water opnemen kan bijvoorbeeld wel vijftien uur duren, waarbij het zuurstofgebruik min of meer constant blijft. Daarna volgt het complexere proces van zuurstofdiffusie door de zaadhuid. De zuurstof moet zich van buiten het zaad een weg banen door de zaadhuid en zo zich verspreiden door de cellen die daar binnen zitten. Helaas is er weinig bekend in de literatuur over zuurstofdiffusie bij zaden, er zijn vooral gegevens voor diffusie in vruchtvlees. De structuur van de zaadhuid zal hierbij een grote rol spelen. Daarnaast maakt het ook veel uit of er water of lucht tussen de cellen zit, zuurstofdiffusie in lucht gaat tienduizend keer sneller dan die in water. Voor de zekerheid nemen de wiskundigen in hun model de laagste snelheid, dus die in water. Hiermee schatten ze dat de diffusie door de zaadhuid ongeveer twaalf minuten kost.

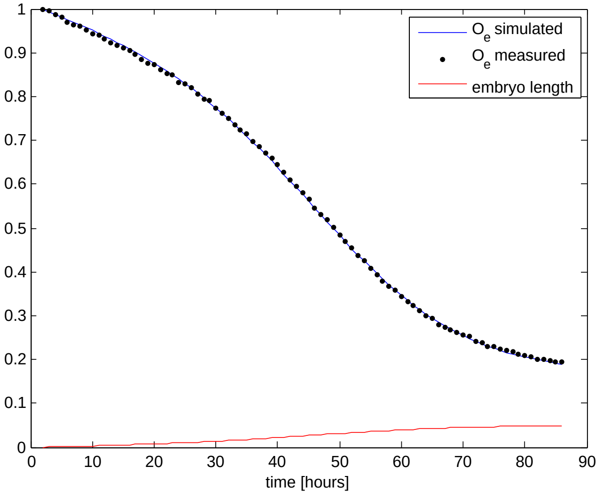
Over het derde proces, de gasstofwisseling van de cellen, blijkt ook niet bijzonder veel bekend in de literatuur. Daarom gebruikt team Fytagoras gegevens van dierlijke cellen, met de kanttekening dat hun conclusies niet zomaar te vertalen zijn naar planten. Een belangrijke les uit de literatuur is dat zuurstof zich langzaam verdeelt over de cellen. De cellen dicht bij wand zijn zuurstofrijker dan die in het midden. Om bij de middelste cellen een voldoende hoge zuurstofconcentratie te krijgen, moet er buiten het zaadje een hogere concentratie zijn dan er binnenin nodig is.

Het vierde proces tenslotte is de celdeling bij het embryo waar de nieuwe cellen ontstaan die het plantje laten groeien. Dit proces gebruikt de meeste zuurstof tijdens het ontkiemen. De tijd tussen twee delingen van dezelfde cel ligt ergens tussen de tien en vijftien uur. Door aan te nemen dat de groeisnelheid van het embryo evenredig is aan het zuurstofgebruik, kunnen de wiskundigen schatten dat het in totaal ongeveer zestig uur duurt van het begin tot het ontkiemen tot het embryo door de zaadhuid breekt.

Alles bij elkaar eindigen de wiskundigen met een model dat in drie vergelijkingen het ontkiemen van een zaadje beschrijft. Daarin zitten nog twaalf onbekenden en twee startvoorwaarden. Dat maakt het lastig om de vergelijkingen op te lossen met de beschikbare meetdata. Gelukkig is een groot deel van de onbekenden op een slimme manier te schatten. Zo blijven er slechts twee onbekenden over waarvan de waarde vervolgens gebaseerd wordt op de meetgegevens van Fytagoras. Nu kunnen ze simuleren hoe het zuurstofgebruik van een zaadje verloopt in elk fase.

Arie Draaijer van Fytagoras is verrast door de resultaten die op vrijdag gepresenteerd worden: “We dachten dat we de laagste zuurstofconcentratie die zaden nodig hebben om te ontkiemen, al wisten. Maar uit deze wiskundige berekening blijkt dat punt veel lager te liggen. Dat kan van belang zijn bij het voorbehandelen van zaden. Dat is wel een sleutelinzicht.”

Team Fytagoras: *Neil Budko, Alessandro Corbetta, Bert van Duijn, Sander Hille, Oleh Krehel, Vivi Rottschäfer, Linda Wiegman en Delyan Zhelyazov*



Figuur 1.4: Het resultaat van een simulatie van het zuurstofgebruik van savooiekoolzaad op basis van het anatomische model.

Hoofdstuk 2

Een schatting voor flesjes

Ionica Smeets

Heineken verkoopt zijn bier in terug te geven flesjes. Het blijkt verrassend lastig om te schatten hoeveel van die flesjes er nog ergens bij een klant staan. De studiegroep oppert een nieuw model én een andere manier van steekproeven nemen.

Een Delftse studentenvereniging wilde eens als grap het hok van hun nieuwe bestuur compleet volbouwen met lege bierflesjes. De ingenieurs hadden natuurlijk zó uitgerekend hoeveel flesjes ze nodig hadden en ze sloegen aan het verzamelen. Met een busje reden ze langs lokale supermarkten om lege flesjes te kopen tegen vergoeding van het statiegeld. Hoewel dit niet geheel volgens de regels was, vonden de supermarkten het wel een mooie grap en ze werkte allemaal graag mee. Behalve dan één manager, die geen zin had om mee te doen aan dit soort flauwe grappen. Natuurlijk kwamen de studenten een week later precies bij deze manager de duizenden lege flesjes terug brengen.

Deze grap had lang niet overal ter wereld gewerkt. Wij kennen een statiegeldsysteem, maar in veel Afrikaanse landen is er een vol-voor-leeg-systeem. Daar ruilen klanten hun lege flesjes in voor volle. De enige manier om aan bier te komen is daar dus om al flesjes te hebben. Daardoor houden mensen een veel grotere voorraad lege flesjes achter de hand dan hier in Nederland. Als een Afrikaanse student voor een feestje extra bier wilt kopen, dan moet hij ergens al die flesjes hebben staan.

Heerlijk helder hergebruik. De vraag die Heineken naar de studiegroep bracht gaat precies over die voorraad lege flesjes. Als Heineken een nieuw ontwerp flesje op de markt brengt, dan moet het bedrijf schatten hoeveel flesjes er in totaal op de markt zijn. Al die lege flesjes moeten dan immers omgeruild worden. In het verleden bleken er soms veel meer flesje op te duiken dan verwacht.

Figuur 2.1: Altijd fijn om een goede voorraad in huis te hebben.

Wat is een betere manier om te schatten hoeveel flesjes er in de verschillende markten zijn? Als Ashish Aggarwal deze vraag op maandag presenteert bij de studiegroep, vliegt er onmiddellijk een hand omhoog in de zaal: "Kunt u niet gewoon tellen hoeveel flesjes u verkoopt en daarvan aftrekken hoeveel flesjes u terugkrijgt?" Aggarwal legt uit dat dit niet zo eenvoudig is: een deel van de flesjes breekt en zal nooit meer ingeleverd worden. Daarnaast worden in Afrika lege bierflesjes op allerlei andere plekken gebruikt: voor opslag en transport van petroleum en soms zelfs door andere bierbrouwers. Overigens merkt hij op dat de vraag niet alleen geldt voor flesjes, maar ook voor kratten en fusten. Maar voor de eenvoudigheid zullen we het steeds over flesjes hebben.

Hoe lang is een flesje weg? Heineken vermoedt dat de schatting voor het aantal flesjes in de markt af zal hangen van de omlooptijd van een flesje. Wat is een efficiënte manier om met een steekproef die omlooptijd te bepalen? Hierbij is het probleem lastiger doordat er niet in elk seizoen evenveel bier verkocht wordt en er een verschil is tussen de omlooptijden van bijvoorbeeld café of supermarkten. Het meten van de omlooptijden is op zichzelf niet zo moeilijk: op elke fles staat een houdbaarheidsdatum, waarmee te schatten is wanneer het flesje op de markt kwam. Door die houdbaarheidsdatum te noteren als een flesje terugkomt, is er een redelijke schatting te maken van hoe lang dit flesje rondzwierf.

Joris Bierkens, onderzoeker aan de Radboud Universiteit Nijmegen, koos voor Team Heineken omdat hij het probleem interessant vond. De beschikbare gegevens over de omlooptijd bleken niet helemaal perfect: "Ze waren ten eerste geanonimiseerd omdat de echte gegevens vertrouwelijk zijn. Dus werkten we aan landen als Beer Republic en Ciderland. Daarnaast waren ze iets onhandig verzameld: Soms telde een krat als één datapunt, soms telden alle vierentwintig flessen in een krat als datapunten. Ons advies aan Heineken is dan ook om voortaan één fles per krat te gebruiken bij een steekproef."

Daarnaast zijn de steekproeven steeds in dezelfde maand gehouden - net na het hoogseizoen, terwijl de wiskundigen liever zien dat er elk jaar een andere maand wordt gebruikt. Dit is dan ook gelijk aanbeveling twee. Toch is uit de beschikbare gegevens al te zien hoe groot de verschillen in omloop zijn. Zoals Ashish Aggarwal maandag in de openingspresentatie aangaf: "De gemiddelde terugkeertijd is dertig dagen, maar sommige flesjes komen pas na zes jaar terug."

Niet elke fles is hetzelfde. De wiskundigen maken verschillende modellen voor het aantal de bierflesjes in de markt. Ze beginnen met het onderscheiden van verschillende soorten flesjes die er op tijdstip t in de markt zijn:

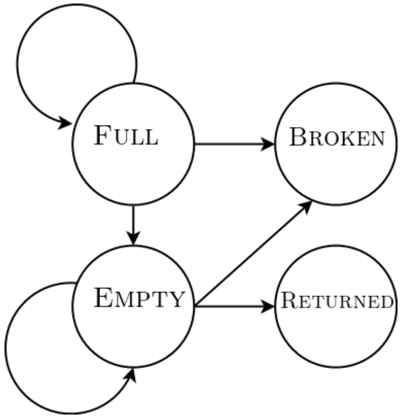
- $R(t)$ zijn de flesjes die op korte termijn Retour komen,
- $S(t)$ zijn de flesjes die Slapen. Ze staan ergens opgeborgen, of worden voor iets anders gebruikt en komen pas terug als er een nieuwe fles op de markt komt,
- $B(t)$ zijn de flesje die geBroken zijn. Ze zijn kapot of permanent ergens anders in gebruik en zullen nooit terugkomen.

Het totaal aantal flesjes in de markt op een bepaald tijdstip is de som van deze drie variabelen: $R(t)+S(t)+B(t)$. Heineken is vooral geïnteresseerd in een schatting voor het aantal slapende flesjes $S(t)$.

De hele week piekeren de wiskundigen hoe je het aantal slapende en gebroken flessen kunt schatten. Ze nemen aan dat een vast percentage van de flesjes gebroken wordt, maar hoe weet je hoe groot dit percentage is? Bierkens beschrijft dat de doorbraak op donderdag kwam met het eenvoudige, slimme idee om aan te nemen dat het aantal slapende flesjes niet meer verandert als de markt stabiel is: "Daarmee is te berekenen hoeveel flesjes er gebroken zijn." Als er namelijk geen flesjes meer verdwijnen naar de slaapstand, is het verschil tussen wat je terugkrijgt en wat je verkoopt het aantal gebroken flesjes. Met deze gegevens komen ze op een percentage van ongeveer 2% gebroken flesjes per omloopcyclus. Dat betekent dat er pakweg bij elke tweede krat een flesje sneuvelt.

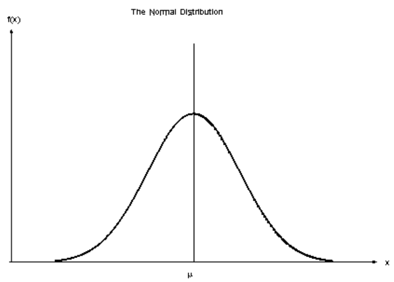
De levencyclus van één flesje Het eerste model dat de wiskundigen maken is vooral geschikt voor landen met een statiegeldsysteem, hierin beschrijven de ze cyclus van één flesje.

Uit dit eenvoudige model ontwikkelt het team een model voor de stroom van flesjes. Hierbij nemen ze aan aan dat de flesjes zich onafhankelijk van elkaar gedragen. In dit model is elk van de mogelijke overgangen bij benadering normaal verdeeld. Het



Figuur 2.2: Een vol flesje kan vol blijven, breken of leeggedronken worden. Een leeg flesje kan blijven staan (slapen), breken of teruggebracht worden.

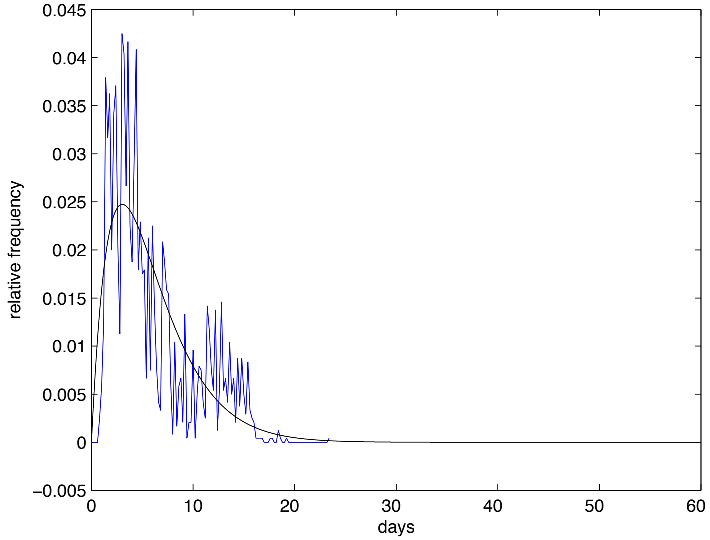
aantal volle flesjes dat er per tijdseenheid breekt heeft dan een kansverdeling van de vorm als hieronder.



Figuur 2.3: Deze normale verdeling komt op heel veel plekken voor: bijvoorbeeld bij lichaamslengte van volwassen mannen of meetfouten. De meeste waarden zitten in de buurt van het gemiddelde (μ) en de uitzonderingen allebei de kanten op worden steeds zeldzamer.

Uit dit model leiden de wiskundigen een stelsel differentiaalvergelijkingen af. Hieruit kunnen ze concluderen dat het voor het model niet uitmaakt hoeveel flesjes er aan het begin in de markt zijn. Wel is het belangrijk om te weten hoeveel flesjes er gemiddeld in het verleden de markt in gingen, waarbij vooral het recente verleden belangrijk is. Het aantal flesjes dat er terugkomt zal een vaste fractie zijn van het aantal lege flesjes.

Verborgen variabelen. De wiskundigen leggen daarna uit hoe met filters en de stelling van Bayes informatie over verborgen variabelen tevoorschijn kan worden getoverd. Om hun model compleet te maken, beschrijven ze hoe je de nodige parameters kunt schatten. De tijd voordat een flesje terugkomt, is de tijd die het nodig heeft om leeg gedronken te raken, plus de tijd die nodig is voor een lege flesje wordt ingeleverd. De studiegroep kiest voor deze tijd een hypoexponentiele verdeling, zie de figuur hieronder. Soms levert deze schatting een grafiek die niet bij de gegevens past. Dat nadeel blijkt een voordeel: als dit gebeurt weet je dat je beter een ander model kunt gebruiken. De studiegroep geeft een een lijst van alternatieve modellen en verwijzingen naar literatuur daarover.



Figuur 2.4: De gegevens van Heineken over hoe vaak flesjes na een bepaalde tijd terugkomen met de hypoexponentiele verdeling die het beste bij deze gegevens past. Hier lijkt het model een keurige beschrijving te geven van de meetdata.

Tenslotte eindigt het rapport met aanbevelingen voor de steekproeven die de omlooptijd van flesjes meten. De wiskundigen geven aan hoe je kunt berekenen hoeveel flesjes er nodig zijn om een bepaalde betrouwbaarheid te halen in de meting. Ze adviseren Heineken om bij de meting twee testen te doen om helder te krijgen wat er wel en niet moet worden meegenomen in een toekomstig rekenmodel. De eerste test moet uitwijzen of de seizoenen invloed hebben op de omlooptijd. Als mensen meer bier drinken in de zomer, komen de flesjes dan sneller terug? Of juist niet? Dit is met een relatief eenvoudige meting te testen en met dezelfde techniek kan Heineken ook andere effecten meten, bijvoorbeeld lange-termijn ontwikkelingen in de verkoop. Een tweede test zou zijn om te kijken of verschillende distributiekanalen een ander soort omlooptijd hebben. Misschien brengen cafés wel altijd eerst de nieuwste flesjes terug, omdat de oudere flesjes achterin hun opslagruimte staan. De extra testen zullen zorgen voor nóg betere modellen.

Team Heineken: *Joris Bierkens, Markus Heydenreich, Sindo Nunez Queija, Patrick van Meurs, Floske Spieksma, Jan Tuitman*

Hoofdstuk 3

De willekeurige discuswerper

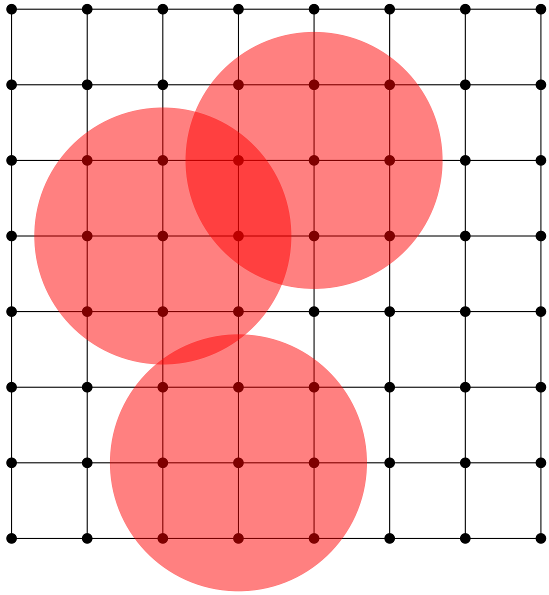
Ionica Smeets

Een discuswerper gooit lukraak schijven op de grond. Hoeveel schijven moet hij gooien voordat de grond helemaal bedekt is? Dit probleem van Philips is misschien wel het meest wiskundige van de studiegroep en tegelijkertijd blijkt het in allerlei vakgebieden op te duiken. Communicatie in netwerken, parkeerproblemen en adsorptie op een oppervlak zijn allemaal varianten van deze discuswerper. Lukt het de wiskundigen om meer inzicht te krijgen in dit beruchte probleem?

Philips Research staat bekend om zijn slimme verlichting. In hun lichtsystemen die zelf beslissen wanneer ze aan-en uitmoeten, zit een netwerk van sensoren. Binnen dat netwerk wordt regelmatig informatie doorgegeven. Een sensor die informatie zendt, doet dat in een cirkel om zich heen. Alle andere sensoren die binnen die cirkel zitten, krijgen de juiste informatie. Het zenden gaat net zo lang door tot het complete netwerk de informatie heeft ontvangen. Hoe lang duurt het voordat dit gelukt is?

Aan het begin van de studiegroep presenteert Philips hun vraag als een discuswerper die schijven in een rooster van punten gooit. Elke schijf landt midden op een nog onbedekt punt, zoals bijvoorbeeld in Figuur 3.1. De discuswerper blijft net zo lang gooien tot alle punten bedekt zijn door een schijf. Hoeveel schijven moet de discuswerper gemiddeld gooien voor hij het hele rooster heeft bedekt?

De punten in het rooster zijn te zien als de sensoren in het lichtsysteem. Een schijf gooien staat voor het verzenden van informatie vanuit het middelpunt. Maar het abstracte probleem van de discuswerper beschrijft ook vraagstukken uit allerlei andere vakgebieden. Scheikundigen zien het als een oppervlak waar willekeurig deeltjes op landen tot het oppervlak verzadigd is en geen nieuwe deeltjes meer opneemt. Wiskundigen kennen het als een abstracte vraag over het stapelen van kubussen in meer dimensies. De eenvoudigste variant hiervan is het *parkeerprobleem van Rényi*: hoeveel auto's passen er achter elkaar in een smalle straat als elke chauffeur zijn auto op een



Figuur 3.1: De discuswerper heeft drie schijven op het rooster gegooid.

willekeurig lege plek neerzet?

Deze problemen hebben met elkaar gemeen dat ze lastig zijn. Dee Denteneer, hoofdonderzoeker bij Philips omschreef het zo tijdens zijn presentatie op maandag: “We gebruiken nu vooral simulaties om dit soort problemen op te lossen. Daaruit krijgen we wel een berg getallen, maar is het erg lastig om te begrijpen wat er precies gebeurt. We hebben fundamentele kennis nodig over deze problemen, we willen het recept kennen. Daarom komen we naar de studiegroep.”

Een nieuwe dimensie. Hun vraag spreekt de wiskundigen aan. Guus Regts, promovendus bij het Centrum Wiskunde en Informatica koos zonder twijfelen voor Team Philips: “Dit was het helderste, meest wiskundige probleem.” Na een brainstorm op maandagmiddag gaat zijn team in kleine groepen aan de slag met verschillende kleine deelproblemen om daarna weer bij elkaar te komen: “We werkten als één organisme.”

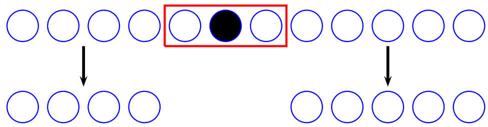
De wiskundigen formuleren het probleem van de discuswerper zo algemeen mogelijk met een meerdimensionaal rooster. Hoeveel (ook al meerdimensionale) schijven moet je naar verwachting gooien om alle punten in dat rooster te bedekken? Of om precies te zijn, wat is de bedekkingsgraad: het aantal gegooide schijven gedeeld door het aantal roosterpunten?

Een variant van dit probleem is de vraag wat er gebeurt als je de schijven op elke plek mag gooien (dus niet per se netjes op een roosterpunt), maar niet toestaat dat schijven elkaar overlappen. Hoeveel procent van de ruimte is dan gemiddeld bezet op het moment dat er geen schijf meer bijpast? De eendimensionale versie hiervan is het *parkeerprobleem van Rényi*, genoemd naar de wiskundige die in 1958 bewees dat in dit geval de dichtheid 0,748 is, iets minder dan vijfenzeventig procent. Dus als je auto's in een smalle straat lukraak neerzet, dan houd je een kwart van de ruimte over.

In twee dimensies is dit probleem om te schrijven naar het probleem van de discuswerper, waarbij de randverschijnselen moeten worden verwaarloosd. Gelukkig zijn die randverschijnselen daar in de praktijk klein genoeg voor. Helaas is het probleem voor twee (en hogere dimensies) nog onopgelost. In 1960 formuleerde wiskundige Palásti het vermoeden dat in dimensie d de dichtheid gelijk is aan $0,748^d$. Maar simulaties laten zien dat dit vermoeden waarschijnlijk onjuist is voor elke dimensie groter dan één. En ruim vijftig jaar later heeft nog niemand een idee wat dan wél de juiste dichtheid is. Pas in 2001 bewees Matthew Penrose dat er in de limiet überhaupt een dichtheid bestaat. Dezelfde Penrose bracht meer eigenschappen van dit soort problemen in kaart, zo bewees hij dat het aantal benodigde schijven ongeveer normaal verdeeld is. Maar veel vragen zijn dus nog onbeantwoord.

Een eendimensionale discuswerper Om meer grip op het probleem te krijgen, besluiten de wiskundigen de eenvoudigste versie te bestuderen: een eendimensionale discuswerper. In dat geval is het rooster een lijn met punten en een schijf is een lijnstuk dat precies drie van die punten bedekt (zijn middelpunt en de twee buurpunten). De bedekkingsgraad zal nu tussen de 33 en 50 procent liggen. In het eerste geval zitten er steeds precies twee lege punten tussen de middelpunten van de schijven, in het laatste geval elke keer precies één. Als de schijven willekeurig gegooid worden, zal de bedekking daar ergens tussenin uit komen.

Het eerste dat opvalt is dat in deze versie het probleem na elke keer gooien splitst in twee kleine problemen.



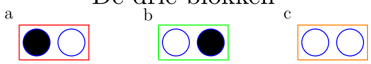
Figuur 3.2: We geven het middelpunt van een schijf aan met een zwart rondje. Zodra er een schijf is gegooid, zijn er drie punten op de lijn bedekt. Links en rechts daarvan blijven er twee kleinere lijnstukken over die los van elkaar geanalyseerd kunnen worden.

Door het splitsen te herhalen is er een elegante formule op te stellen voor de bedekkingsgraad. Met analytische technieken is vervolgens te berekenen dat bij een willekeurige discuswerper de bedekkingsgraad ongeveer 43,2 procent is.

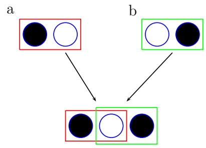
Overgangen. Dat is niet de enige manier om naar het probleem te kijken. Een andere aanpak is om de toegestane eindsituaties te beschrijven. Maak de punten waar het middelpunt van een schijf ligt weer zwart. Dan mogen er aan de ene kant geen twee zwarte punten naast elkaar zijn, want een schijf landt nooit midden op een bedekt punt. Aan de andere kant mogen er geen drie witte punten naast elkaar zijn, want dan is het middelste punt onbedekt.

Toegestane eindsituaties zijn te krijgen door een lijn te maken uit drie soorten blokken die als domino-stenen op elkaar moeten komen. Twee dezelfde zijkanten mogen samen gecombineerd worden tot één vakje.

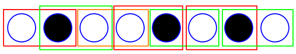
De drie blokken



Het combineren van twee blokken



Een mogelijke uitkomst



Met deze blokken is het proces te beschrijven als een Markov-keten. Hierover is veel theorie beschikbaar en de studiegroep besluit aan te nemen dat de entropie in het systeem zo groot mogelijk zal zijn. Dit betekent dat het systeem ongevoelig is voor kleine verstoringen.

Deze aanname leidt tot een schatting voor de bezettingsgraad van 41,1 procent, niet zo ver van de eerder berekende 43,2 procent. Eventueel is deze methode nog aan te scherpen door met grotere bouwblokken te werken.

Tellen maar. De derde en laatste aanpak die de studiegroep probeert voor het ééndimensionale probleem is slim tellen van mogelijkheden. Voor het probleem van de discuswerper bestaat dit tellen uit twee stappen:

1) Bepaal alle mogelijke configuraties die het rooster bedekken

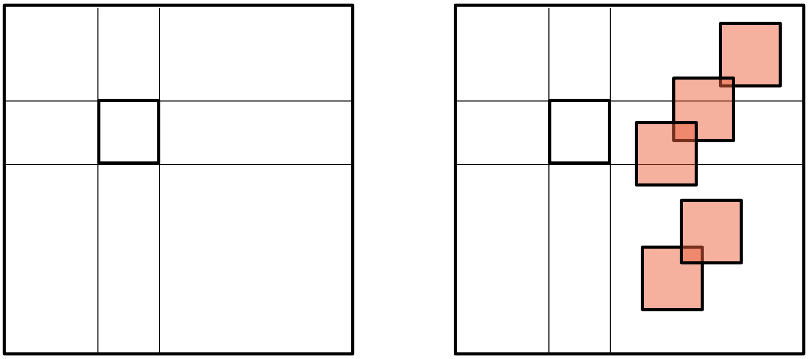
2) Bepaal voor elke configuratie de kans dat je hem bereikt door schijven te gooien

Bij het tellen zijn de configuraties te verdelen in soorten die erg op elkaar lijken. Bij een lijn met éénentwintig punten zijn er bijvoorbeeld elf verschillende soorten met in totaal 379 configuraties.

Omdat het uitrekenen van de kansen net zo lastig is als het probleem in één keer aanpakken, besluit de studiegroep om de kansen grof te schatten. De eerste schijven belanden op een lege lijn en zullen steeds drie punten bedekken. Daarna komen steeds vaker schijven aan één kant naast een andere schijf terecht en bedekken ze nog maar twee nieuwe punten. Tenslotte zullen de laatste schijven landen op losse punten die nog bedekt moeten worden. Deze benadering levert voor het voorbeeld met ééntwintig punten op dat de bedekkingsgraad normaal verdeeld is met een gemiddelde van 9,07 en variantie van 0,24. Simulaties geven voor dit geval als “correcte” antwoord een gemiddelde van 9,38 en een variantie van 0,44.

Het echte probleem. De wiskundigen zijn nu gewapend met drie verschillende methodes om het eendimensionale geval aan te pakken, maar Philips is natuurlijk vooral geïnteresseerd in oplossingen voor het tweedimensionale probleem. Maar het is niet zo makkelijk om de methoden te generaliseren.

Bij het splitsen van het probleem duiken er bijvoorbeeld problemen op bij de afhankelijkheden. Bij elke gelande schijf valt het rooster uit elkaar in een aantal kleinere stukken. Maar anders dan bij het ééndimensionale geval, kunnen schijven uit verschillende gebieden elkaar in de weg liggen. Daardoor zijn de kleinere problemen niet zo makkelijk los van elkaar op te lossen. Wiskundige Guus Regts: “Je hebt te maken met lange-afstands-effecten. Zelfs kleine problemen worden daardoor te groot om met de hand op de lossen.”



Figuur 3.3: Een voorbeeld met vierkante schijven maakt het probleem van de overlap duidelijk.

Ook het tellen van alle configuraties is een stuk ingewikkelder bij het tweedimensionale geval. Als het rooster bijvoorbeeld dertig bij dertig is en schijven steeds vijfentwintig punten tegelijk bedekken, dan zijn er al tien tot de macht vijfennegentig mogelijke configuraties. Dat is royaal meer dan het aantal atomen in het complete heelal.

De hoop voor de tweedimensionale discuswerper lijkt vooral te liggen in de richting van de Markov-ketens. Deze kunnen in meer dimensies worden uitgebreid naar Markov-netwerken. Maar dat is iets voor een vervolgstudie.

Dee Denteneer van Philips is vrijdag tevreden over de resultaten: “We hebben een hoop nieuwe aanknopingspunten. Dat open vermoeden kenden we bijvoorbeeld niet. Voor ons zijn dit soort wiskundige referenties lastig om te vinden, omdat we zo gericht zijn op toepassingen. We gaan hier mee verder, vooral de Markov-optie is erg interessant."

Team Philips: *Ted van der Aalst, Dee Denteneer, Hanna Döring, Manh Hong Duong, Ross J. Kang, Mike Keane, Janne Kool, Ivan Kryven, Thomas Meyfroyt, Tobias Müller, Guus Regts, Jakub Tomczyk*

Hoofdstuk 4

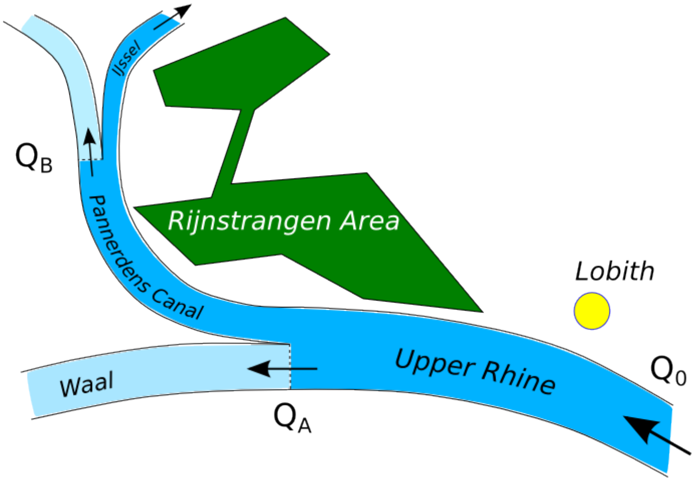
Ruimte voor de Rijn

Ionica Smeets

De Nederlandse dijken zijn gebouwd om een extreme situatie te weerstaan die eens in de 1250 jaar voorkomt. Maar klimaatverandering vergroot de kans op overstromingen. In de toekomst zal er bijvoorbeeld meer water via de Rijn ons land binnenkomen. Rijkswaterstaat overweegt om een gebied langs de Rijnoevers te gebruiken om rivierwater op te slaan als de waterstand te hoog dreigt te worden. Maar is dat gebied groot genoeg? En hoe vaak komt zo'n hoge waterstand voor? En hoe komt het water van de rivier netjes in dat gebied? Werk aan de winkel voor de studiegroep.

Rijkswaterstaat bewaakt de rivierhoogten in Nederland zodat we veilig kunnen wonen, zelfs al doen we dat onder het waterniveau. Ralph Schielen, Expert Water Management, legt tijdens zijn presentatie op maandag uit dat Rijkswaterstaat zoekt naar duurzame oplossingen voor de stijgende wateraanvoer. In plaats van dijken op te hogen, krijgen rivieren meer ruimte om te stromen. Rijkswaterstaat overweegt om het gebied Rijnstrangen te reserveren als retentiegebied: een tijdelijke opvang voor overtallig water. Dat zou grote gevolgen hebben voor de mensen die daar op dit moment wonen en werken: zij moeten evacueren in extreme situaties. Daarom heeft Schielen een hele lijst vragen die hij beantwoord wil hebben voor Rijkswaterstaat een beslissing over Rijnstrangen kan nemen: "Ik wil geen *misschien* als antwoord, ik wil een helder *ja* of *nee*."

Om in de rest van Nederland overstromingen te voorkomen, mag er volgens de normen van Rijkswaterstaat maximaal 17.500 kubieke meter per seconde (m^3/s) de Rijn uitstromen. Ter vergelijking: dat zijn ruim zeventien complete wedstrijdzwembaden per seconde. Als de instroom bij Lobith hoger is dan deze grens, wil Rijkswaterstaat 500 m^3/s uit de rivier weg laten lopen. Daarvoor is het belangrijk om te weten wat de kans is dat deze grens bereikt wordt en hoe groot het retentiegebied moet zijn om het overtollige water kwijt te kunnen. Daarnaast wil Rijkswaterstaat ook weten wat het



Figuur 4.1: De Rijn stroomt Nederland binnen bij Lobith en splitst daarna in de Waal en het Pannerdens Kanaal. Dat laatste vertakt zich dan weer in de Nederrijn en de IJssel. Het potentiële retentiegebied Rijnstrangen ligt rond de eerste splitsing.

effect is op het achterliggende gebied, hoe het water van de rivier naar Rijnstrangen moet stromen én hoe het retentiegebied daarna weer geleegd kan worden.

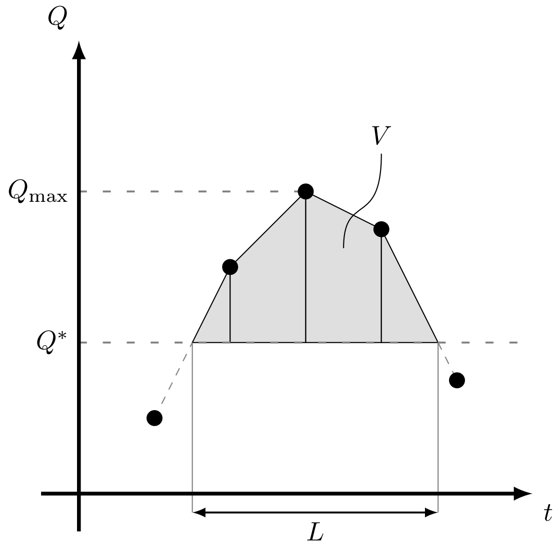
Vergelijkingen. Corine Meerman doet bij de Universiteit Leiden promotie-onderzoek naar vergelijkingen voor ondiep water, dus het was voor haar vanzelfsprekend dat zij meedeed aan team Rijkswaterstaat. Ze beseft dat dit probleem veel ingewikkelder is dan puur wiskunde: “Er spelen ook allerlei sociale, politieke en economische vragen. Maar daar blijven wij af: wij zijn wiskundigen. Dus werken we met vergelijkingen.”

Om de eerste vragen te beantwoorden, analyseert het team de dagelijkse uitstroom bij Lobith sinds 1989. Ze verdelen de meetgegevens is perioden die steeds een jaar beslaan, lopend van 1 juli tot 30 juni. Zo ligt de winter waarin de meeste extreme weersomstandigheden optreden steeds midden in één meetperiode.

De dagelijkse meetgegevens zijn niet onafhankelijk van elkaar: als de uitstroom om de een of andere reden gisteren bijzonder hoog was, dan zal hij vandaag waarschijnlijk ook hoger zijn dan gemiddeld. Een standaardmethode om onafhankelijke metingen te krijgen, is door alleen uitschieters te selecteren waar minstens honderd dagen tussen zit. In dit geval vallen deze pieken grotendeels samen met de hoogst gemeten instroom per jaar. Daarom besluit het team om voor hun model alleen de maximale instroom van elk jaar te gebruiken. Zo hebben ze 23 metingen om mee te werken.

Met een verdeling die vaak gebruikt wordt om zeldzame extreme gebeurtenissen te voorspellen, rekenen ze uit dat de kans op een uitstroom van meer dan 17.500 m^3/s per jaar gelijk is aan één op 1208. Maar, voegen de wiskundigen eraan toe, dat zegt eigenlijk niets. Om deze analyse goed te doen, zouden ze meer data nodig hebben.

Ze besluiten om het nu andersom aan te pakken en rekenen uit wat de ergste uitstroom is die je in 1250 jaar kunt verwachten, daarop zijn de normen voor de dijken immers gebaseerd. Dat levert een verwacht maximum van 17.555 m^3/s: dat is dus net boven de door Rijkswaterstaat toegelaten waarde. Op naar de volgende vraag: hoeveel water moet er afgevoerd worden? Oftewel: hoe lang blijft de toevoer te hoog in deze uitzonderlijke situatie?



Figuur 4.2: Q^* is de toegelaten uitstroom van 17.500m^3/s, $Q_{\max}$ is het maximum dat voorkomt. Om te bepalen hoe lang de uitstroom boven het de toegelaten grens uitkomt (L), worden er lijnen getrokken tussen de verschillende meetmomenten. De oppervlakte onder de grafiek geeft de hoeveelheid water die moet worden opgeslagen.

De modellen van de studiegroep voorspellen dat de uitstroom in deze extreme situatie ongeveer 3,5 dagen boven het toegelaten maximum zal liggen. In totaal moet er 94 miljoen kubieke meter water afgevoerd worden, 94.000 wedstrijdbaden vol. Rijnstrangen is daar in principe groot genoeg voor: dat kan 150 miljoen kubieke meter kwijt. De wiskundigen merken wel op dat enige voorzichtigheid nodig is bij deze berekeningen: ze hebben geen echte meetgegevens van wat er gebeurd als de kritieke 18.000 m^3/s bereikt wordt, klimaatverandering kan de patronen veranderen en voor de zekerheid moet je eigenlijk ook nog rekening houden met de dubbele pech dat een extreme uitstroom ook nog eens extreem lang duurt.

Het team besluit om niet te werken aan een methode om Rijnstrangen weer leeg te maken. De data laten zien dat de kans op twee pieken na elkaar bijzonder klein is. Het leegpompen van Rijnstrangen heeft uit dat oogpunt geen haast, al zullen de bewoners daar vast anders over denken. Maar de tijd dringt in de studiegroep en ze gaan door met het volgende probleem: het modelleren van de gevolgen voor de rest van het rivierenstelsel als water naar Rijnstrangen stroomde.

Ja/nee/misschien. Bij het maken van een model voor de stroming in de rest van de rivier, hadden de wiskundigen soms het gevoel dat het handiger was geweest als er een hydroloog in hun team zat. Meerman: “Normaal doe je als wiskundige wat aannamen en maak je een model. Maar nu wisten we niet eens wat we moesten vragen. Niemand had een idee.” Desondanks besloten ze om een numeriek model te maken op basis van een heel versimpelde vorm van het rivierenstelsel. Achteraf denkt Meermans collega Ron Hoogwater dat hun gebrek aan voorkennis misschien wel een voordeel was: “Een hydroloog had misschien gezegd dat het onmogelijk was om binnen een week een werkend model te maken. Wij begonnen gewoon aan een enorm vereenvoudigd toy model.” De conclusie: opvang in Rijnstrangen zal geen problemen geven in het achterland. Al zeggen ze wel dat hun berekeningen puur ter illustratie zijn en dat voor een serieuzere studie bijvoorbeeld de vorm van de dijken veel netter gemodelleerd moet worden.

De laatste vraag voor de wiskundigen is op welke manier het overtollige water van de Rijn naar Rijnstrangen moet lopen. De eenvoudigste optie is een dam waar het water vanzelf overheen loopt als het waterpeil te hoog wordt. Eigenlijk betekent dit een lokale verlaging van de dijk op een bepaald traject. Maar uit de berekeningen van het team volgt dat zoÕn dam dertien kilometer lang zou moeten zijn: daar is geen plek voor bij Rijnstrangen. Bovendien voegde Corine Meerman hier tijdens haar presentatie aan toe: “Zelfs als je zo’n lange dam weet te bouwen, dat stroomt het overtollige water niet snel genoeg weg en zal de uitstroom naar het achterland boven de gestelde limiet komen.” Eventueel zou dit nog opgelost kunnen worden door de dam lager te maken: in dat geval begint het water al naar het retentiegebied te stromen voor de limiet is bereikt.

Een tweede optie zijn sluisdeuren waarvan de hoogte verstelbaar is. Hierbij moeten de deuren continu worden bijgesteld en om dit goed te doen, moeten de berekeningen erg nauwkeurig zijn. Als de deuren te vroeg open gaan, dan is het retentiegebied al volgelopen voor de piek is bereikt. Als de deuren te laat open gaan, stroomt er te veel water door en kunnen er verderop overstromingen ontstaan. De wiskundigen twijfelen of het aansturen in de praktijk haalbaar is. Een sluis die alleen open en dicht kan is misschien makkelijker in gebruik.

Tenslotte is er nog een optie om het water via een pijp die onder de dijk doorloopt af te voeren. Alleen stroomt het water in dat geval twee keer zo snel Rijnstrangen binnen, wat schade kan opleveren aan het landschap achter de dijk. Meerman van hun conclusies over optie als volgt samen: “Sorry Ralph, je zei aan het begin van de week dat je geen misschien wilde horen. Maar ons antwoord is. Een dijk? Nee. Sluisdeuren? Misschien. Onder de dijk door? Misschien.”

Ralph Schielen van Rijkswaterstaat reageert mild: “Ik begrijp dat de onzekerheden bij dit probleem echt moeilijk zijn, je moet het echt heel zeker weten als je dit soort beslissingen neemt." Schielen is onder de indruk van het werk van het team: "Het is geweldig dat jullie binnen een week een eenvoudig numeriek model hebben gebouwd. Wij gebruiken bij Rijkswaterstaat veel complexere modellen, maar hiermee kunnen we in toekomst snel verschillende mogelijkheden even proberen. We gaan ermee aan de slag."

Team Rijkswaterstaat: *Chris Budd, Joep Evers, Jason Frank, Sarah Gaaf, Ron Hoogwater, Domenico Lahaye, Corine Meerman, Eric Siero, Tara van Zalen.*

Hoofdstuk 5

Een hardnekkig probleem

Ionica Smeets

Probeer eens voor je te zien wat er gebeurt als je aan rolletje klei trekt. Het rolletje rekt eerst langzaam uit, daarna ontstaat er ergens in het midden één plek die snel dunner wordt, tot het rolletje breekt. Een vergelijkbaar effect treedt op bij metalen die worden uitgerekt: ook daar kan alle spanning op één klein gebied samenballen wat tot ernstige vervormingen leidt. TNO wil beter begrijpen wat er precies gebeurt bij deze vervorming. Het probleem is dat in dit geval de krachten in drie dimensies werken, maar dat de gebruikelijke modellen tweedimensionaal zijn. Kunnen de wiskundigen de analyse naar een hogere dimensie tillen?

Het is voor allerlei toepassingen belangrijk om te begrijpen wat er gebeurt als metalen onder druk komen te staan. In oktober 2012 botste in Hong Kong bijvoorbeeld een veerboot tegen het schip Lamma IV. De waterdichte compartimenten van de Lamma IV scheurden open en vulden zich razendsnel met water. Het schip zonk zo snel dat passagiers niet eens tijd hadden om een reddingsvest aan te trekken en bijna veertig passagiers verdronken. Dit soort botsingen is moeilijk te voorkomen, maar TNO wil graag beter begrijpen hoe metaal reageert bij een botsing. Betere simulaties en begrip van het botsingsproces, kunnen in de toekomst mensenlevens redden.

Verschillende vervormingen. Als er een kracht op een voorwerp wordt uitgeoefend, dan zal dat eerst elastisch vervormen. De naam elastisch zegt het al: als de kracht verdwijnt, keert het voorwerp weer terug naar zijn oorspronkelijk vorm. Net als een elastiekje. Maar als de kracht te groot is, dan raakt het voorwerp blijvend vervormd, als een elastiek dat te ver uitgerekt is. Zo'n vervorming die niet omkeerbaar is heet een plastische deformatie. Carey Walters van TNO legt aan het begin van de studiegroep uit dat hij werkt aan botsingen en explosies waarbij materialen onder extreme druk staan en daardoor vervormen.

Figuur 5.1: De gehavende Lamma IV na de botsing.

Om precies te zijn gaat het probleem van TNO over *necking*, oftewel insnoering. Daarbij wordt een (metalen) voorwerp zover uitgerekt dat alle vervorming zich verplaatst naar één gebied. Als voorbeeld laat Carey een ronde buis zien waarbij het midden van de buis veranderd is in een heel smal stuk, een soort nek.

Figuur 5.2: Een metalen buis met een nek die ontstaan is doordat er teveel kracht op de buis stond.

Het doel van de studiegroep is het modelleren van wat er in die nek gebeurt. De plastische vervorming is te beschrijven met een tweedimensionaal model, omdat overal in de buis hetzelfde gebeurt. Zodra de nek ontstaat, raakt het proces volledig driedimensionaal. Bestaande modellen werken echter in twee dimensies en negeren dit effect. Daardoor zijn de simulaties niet altijd even betrouwbaar. Carey vertelt maandag tijdens zijn presentatie waar hij op hoopt: “Het liefste wil ik de tweedimensionale beperking verwijderen en wel de eenvoud van de bestaande modellen houden.”

Spanning en relaties. Wiskundige Lotte Sewalt van de Universiteit Leiden legt uit waarom TNO kijkt naar buizen: “Die zijn in een laboratorium een stuk makkelijker te testen dan complete schepen. Bovendien is het al heel moeilijk om die buis helemaal te begrijpen Je wilt uit het gedrag van de randen afleiden wat er in het midden bij de nek gebeurt.”

Het verslag van de studiegroep begint met een korte samenvatting van continue mechanica. Zolang materiaal elastisch vervormt is de relatie tussen de spanning en de vervorming lineair. Op het moment dat het materiaal meegeeft, wordt de situatie veel ingewikkelder. Aannemen dat het materiaal in alle richten dezelfde eigenschappen heeft én dat hydraulische druk geen invloed heeft op het moment dat de plastische vervorming begint, vereenvoudigt het proces enigszins. De Duitse wiskundige Richard von Mises stelde aan het begin van de twintigste eeuw voor om daarnaast aan te nemen dat het meegeven van het materiaal kwadratisch afhangt van de spanning in verschillende richtingen. Alles bij elkaar volgt hieruit dat de spanning zoals Von Mises hem formuleerde samenhangt met de vervorming volgens een machtsverband. In het ééndimensionale geval is de Von Mises-spanning een macht van de vervorming (keer een of andere constante). Om deze relatie om te zetten naar drie dimensies, zijn er verschillende aanpakken mogelijk.

Modellen. Het team van wiskundigen duikt in de literatuur en ontdekt dat er al een heleboel modellen bestaan voor *necking*. Sewalt: “Het blijkt enorm lastig om het model goed te formuleren. Welke waarden zijn relevant? Wat kun je weglaten? Sommige versimpelingen maken het probleem ineens triviaal.” In het algemeen geven metingen alleen informatie over de gemiddelde spanning in de nek. Maar er is op voorhand niet bekend wat de precieze vorm van de nek zal zijn, wat het extreem moeilijk maakt om de verdeling van de spanning te berekenen. Elk model doet andere aannames over hoe de spanning verdeeld is over de nek, maar niet alle aannamen zijn realistisch.

Het klassieke model komt van P.W. Bridgeman en is meer dan vijftig jaar oud. Bridgeman kreeg in 1946 de Nobelprijs voor de Natuurkunde voor zijn werk aan hoge druk. In zijn postuum gepubliceerde onderzoeksartikelen uit 1964 bespreekt hij hoe een nek ontstaat in een rekbare buis.

Bridgeman neemt op basis van zijn eigen experimenten aan dat de spanning uniform verdeeld is bij het smalste punt van de nek. In dat geval is de spanning te berekenen vanaf dat punt en is de spanning op een punt van de buis evenredig met de afstand tot het midden van de buis.

In dit geval zijn er tamelijk elegante formules af te leiden voor het moment dat de nek zal gaan vormen en voor de uiteindelijke vervorming. Alleen zijn de modellen helaas niet realistisch voor de vervorming van metalen buizen zoals TNO ze bestudeert.

In de jaren zeventig breidde M.A. Kaplan de analyse van Bridgman uit naar buizen van zacht metaal. De aanname is hier dat de vervorming in een symmetrische staaf zelf ook symmetrisch zal zijn ten opzichte van de as. Een tweede belangrijke aanname is dat de vervorming puur plastisch is, eventuele elastische vervorming wordt verwaarloosd. Dat laatste is overigens een zeer realistische aanname, omdat in de praktijk bij dit soort metalen de bijdrage van de elastische vorming ongeveer 1% is als het nekken begint, en daarna alleen maar kleiner wordt.

De analyse van Kaplan gebruikt dat de verhouding tussen de straal in het midden van de nek en straal aan de rand van de nek steeds hetzelfde blijft in het proces, iets dat al uit metingen van Bridgman bleek. Door de straal van de buis na de vervorming te meten weet Kaplan de spanning af te leiden. De voordelen van Kaplans model zijn dat alle parameters makkelijk te meten zijn en dat het model beter met de praktijk van plastische vervormingen klopt dan Bridgmans werk. Het nadeel is dat het uiteindelijk niet de driedimensionale vervormingen beschrijft.

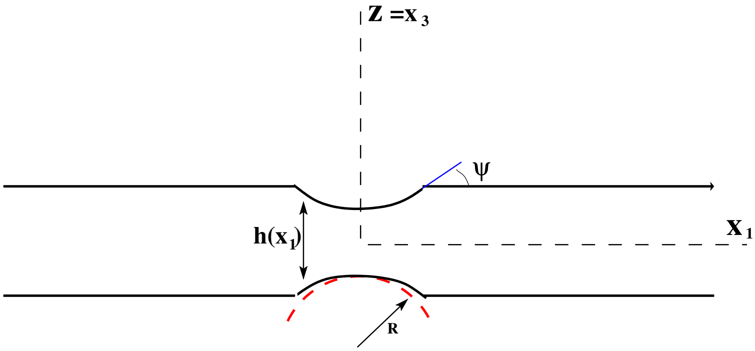
Drie dimensies. In een poging de modellen naar de derde dimensie te tillen, proberen de wiskundigen twee verschillende methoden. De eerste is om de vergelijking voor de Von Mises-spanning in het ééndimensionale geval direct om te zetten naar drie dimensies. Daarvoor moet je alleen wel de effectieve spanning kennen.

Een andere generalisatie werd in de jaren zeventig door J. Hutchinson en co-auteurs voorgesteld, hier is de driedimensionale spanning een iets ingewikkeldere functie van de vervorming en constanten die bij het specifieke materiaal horen.

Om te begrijpen hoe het nekken verloopt, bestuderen de wiskundigen een dunne metalen plaat. De plaat begint in rust en daarna wordt er een gelijkmatige trekkracht op de uiteindes uitgevoerd. Met een redenering in de trant van het werk van Hutchinson leiden de wiskundigen een niet-lineaire differentiaalvergelijking af die beschrijft hoe de spanning in het vlak van de plaat zich in de loop der tijd ontwikkelt. Deze vergelijking is numeriek op te lossen. Omdat de tijd in de studiegroep beperkt is, kiezen de wiskundigen ervoor om die oplossing niet te zoeken, maar nog dieper in de theorie van het nekken te duiken.

Na een boel aannames en een hoop afleidingen concluderen de wiskundigen dat de spanning in de nek alleen maar uniform is als de materiaalconstante strain hardening exponent precies 4 is. Helaas is die exponent voor staal eerder rond de 0,44. Verder zien het team dat met de gemaakte aannames de vergelijkingen voor de spanning bij Hutchinson op één factor na gelijk zijn aan die van Bridgman.

Wordt vervolgd. Uiteindelijk moeten de wiskundigen concluderen dat het probleem van TNO verre van triviaal is en dat er helaas te weinig tijd was om een compleet driedimensionaal model te ontwikkelen. Bas van ’t Hof van VORtech is trots op wat ze in korte tijd gevonden hebben, maar baalt dat de studieweek zo snel



Figuur 5.3: De vorm van de metalen plaat zoals de wiskundigen hem bestudeerden. Door een analyse van de verstoring te maken, kan bepaald worden hoe de nek er aan het begin uitziet zonder aannamen over de kromming.

omvloog: “We hebben zoveel goede aanknopingspunten, maar allemaal nét niet wat we zoeken. Hadden we maar iets meer tijd.” Het team adviseert TNO om de besproken modellen verder te onderzoeken, liefst zowel met pijpen in het lab als met numerieke simulaties, zodat gekeken kan worden welke aannames het beste overeenkomen met de praktijk.

Carey Walters zegt aan het eind van de week dat hij in het begin wel moest lachen om de reacties: “De wiskundigen leken te denken dat ik hen vroeg om het wiel uit te vinden, omdat er al zoveel over het probleem bekend was. Maar wat ik vroeg stond echt niet in de literatuur. Deze week heb ik in veel discussies meegedaan. Door aan niet-ingenieurs uit te leggen wat precies mijn probleem is, heb ik veel geleerd over het fenomeen. De idee‘n van de wiskundigen zijn zeker interessant en ze hebben ook een aantal artikelen opgedoken die ik nog niet kende. Maar de grootste toegevoegde waarde waren de discussies.”

Team TNO: *Nicodemus Banagaaya, Johan Dubbeldam, Bas van ’t Hof, Keith Myerscough, Björn de Rijk en Lotte Sewalt*

Hoofdstuk 6

Aanvaardbare risico's in de koffiehandel

Bennie Mols

Wie een kopje koffie drinkt, staat niet stil bij de flinke hoeveelheid financiële wiskunde die schuilt achter de prijs van dat kopje koffie.

Koffie is na olie het meest verhandelde bulkgoed ter wereld. Een barrel – een standaardvat van 159 liter – gevuld met ongeroosterde koffiebonen is meestal zelfs meer waard dan eenzelfde vat ruwe olie. Meer dan vijftig landen rond de evenaar verbouwen koffie, waaronder Brazilië, Colombia, Indonesië, Vietnam en Ethiopië Koffiebonen komen in twee verschillende soorten voor: Arabica en Robusta. Arabica is qua smaak wat verfijnder; Robusta is wat steviger en wordt veel gebruikt voor espresso en oploskoffie. De handel in Arabica vindt plaats op de New York Board of Trade, de handel in Robusta op Liffe in Londen. Zowel de New Yorkse als de Londense markt zijn een termijnmarkt, die werkt met contracten voor levering van koffie in een bepaalde maand. Net als bij olie is de koffiemarkt een markt waarop de prijs flink kan fluctueren. Op het ene moment is de prijs bijvoorbeeld $2.700 per ton, terwijl de prijs een jaar later gezakt kan zijn naar $1.400 per ton. En net zoals opties in de aandelenmarkt het recht geven om een aandeel op een afgesproken moment in de toekomst tegen een bepaalde prijs te kopen of te verkopen, worden ook op de koffiemarkt contracten afgesloten om koffie tegen een bepaalde prijs in de toekomst te kopen of te verkopen. Twintig procent van de handel is in echte koffiebonen die op de consumptiemarkt komen, maar tachtig procent van de handel is door speculanten en gebeurt alleen virtueel.

Risicocalculatie

Nedcoffee B.V. is een Nederlandse bedrijf dat al meer dan tachtig jaar in koffie handelt. Het bedrijf verhandelt jaarlijks 120.000 ton koffie. De kleinste hoeveelheid die je bij

Figuur 6.1: Een Braziliaanse koffieplantage.

Nedcoffee kunt kopen is twintig ton. Vandaar dat het bedrijf ook alleen levert aan grote koffieafnemers, zoals Douwe Egberts, Lavazza en Nestlé.

“De cruciale vraag voor Nedcoffee”, vertelt financieel directeur Erik Daamen, “is wat een aanvaardbaar risico in onze handel is. We willen met 98% zekerheid weten dat we niet meer dan een bepaald bedrag per dag mogen verliezen. We zoeken een formule die dat het beste kan berekenen, gebaseerd op de historische data van de koffiehandel in de afgelopen zestig dagen. Die 98% is onze subjectieve keuze. Als we dat percentage lager zouden maken, dan lopen we als bedrijf ook meer kans om op één dag heel veel geld kwijt te raken.”

De gezochte formule is een formule voor de zogeheten Value At Risk, kortweg VAR. Voordat Õs ochtends de wereldwijde koffiehandel in New York en Londen open gaat, hebben de handelaren van Nedcoffee op basis van de VAR berekend wat ze moeten doen om die dag te voldoen aan het aanvaardbare risico. Moeten ze na de opening van de markt koffie kopen, of juist verkopen? En zo ja, hoeveel dan precies?

Verborgen prijsstructuren

Tot voor kort gebruikte Nedcoffee een vrij eenvoudig wiskundig model dat geen rekening hield met bijvoorbeeld bepaalde verborgen prijsstructuren op de termijnmarkt voor koffie. Zo hebben de prijzen van Robusta en Arabica historisch gezien een zekere correlatie met elkaar. Daamen: “Als de Robusta-oogst slecht is, stijgt de prijs van Robusta door een afnemend aanbod. Waarschijnlijk stijgt dan ook de prijs van Arabica, omdat Arabica deels als vervanging van Robusta wordt gekocht. Het kan ook zijn dat de prijs van de ene soort daalt en die van de andere soort stijgt. Of de koffieprijs voor levering in januari kan veel hoger zijn dan voor levering in maart.

Bijvoorbeeld omdat er nu geen koffie is, maar in maart een grote oogst op de markt komt."

Nedcoffee wist dat het model kon worden verbeterd door de verschillende correlaties wel mee te nemen, maar wist niet hoe het dat het beste moest doen. Daarom riep het bedrijf de hulp in van wiskundigen van de Studiegroep Wiskunde met de Industrie. De wiskundigen gingen begin 2013 aan de slag en ontwikkelden een model waarin de onderliggende structuur van de koffiemarkt beter werd gemodelleerd. "Sinds 1 november 2013 passen we dit verbeterde model toe", zegt Daamen, "en alles lijkt er op dat het model inderdaad beter voldoet dan ons oude model."

Team Nedcoffee: *S. Gugushvili, J. Nowotarski, C.W. Oosterlee, L. Ortiz-Garcia, E. Verbitskiy*

Dankwoord

De *Studiegroep Wiskunde met de Industrie* werd mogelijk gemaakt door financiële steun van NWO en STW en door bijdragen van het Lorentz Center, KWG, ECMI en onze industriële partners (Fytagoras, Heineken, Nedcoffee, Philips Research, Rijkswaterstaat Waterdienst en TNO). De bijeenkomst was succesvol door de inbreng van de deelnemende wiskundigen en de transparente en nauwe samenwerking met onze industriële partners. Van harte bedankt!

De organisatoren van SWI 2013