Herkansing Algebra 1, 9 augustus 2012, 14:00–17:00

Je mag het dictaat, je aantekeningen, en boeken gebruiken, maar geen rekenmachine en andere electronische hulpmiddelen. Motiveer steeds je antwoord, en noem de resultaten die je gebruikt. Er mag verwezen worden naar resultaten die in het dictaat bewezen zijn, maar niet naar opgaven, tenzij anders vermeld. Op de achterkant staan formules en resultaten waar je ook naar mag verwijzen. Onderaan de pagina staat de normering. Controleer je antwoorden zoveel mogelijk. Het tentamen wordt op 10 augustus nagekeken. Succes!

Opgave 1. Laat σ in S_{10} gegeven zijn door $\sigma = (6\ 5\ 4)(3\ 2\ 1)(2\ 5\ 7\ 9)(3\ 6\ 8\ 10)$.

(a) Geef een disjuncte cykeldecompositie van σ. Geef de orde van σ.

(b) Bepaal $\sigma^{2012^{809}}$.

(c) Is er een τ in S_{10} met $\tau^2 = \sigma$ en $\mathrm{orde}(\tau) = 10$? Zo ja, geef er één.

(d) Is er een τ in S_{10} met $\tau^5 = \sigma$? Zo ja, geef er één. Hint: denk aan $\mathrm{orde}(\tau)$.

Opgave 2.

(a) Bestaat er een a in $\mathbb{Z}$ met $101{\cdot}a \equiv 1 \bmod 255$? Zo ja, bepaal zo'n a.

(b) Laat p een priemgetal zijn. Los op de vergelijking $x^2 = x$ voor x in $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

(c) Bepaal het aantal oplossingen van de vergelijking $x^2 = x$ voor x in $\mathbb{Z}/255\mathbb{Z}$. Hint: Chinese reststelling.

Opgave 3. Laat Z de verzameling zijn van de zijden van een regelmatige 15-hoek, en $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$. Hoeveel banen heeft de verzameling $\{f \colon Z \to \{1, 2, \ldots, n\}\}$ van "kleuringen" onder de natuurlijke werking van de *rotatie groep* C_{15}?

Opgave 4. Laat G de groep S_4 zijn, werkend op zichzelf door conjugatie. Geef een representantensysteem voor deze werking, en geef voor iedere representant σ het aantal elementen van de baan en van de stabilisator.

Opgave 5. Laat G een eindige commutatieve groep zijn van oneven orde, en $n \in \mathbb{Z}_{\geq 3}$ oneven. Bepaal $\#\mathrm{Hom}(D_n, G)$.

Opgave 6. Laat G een groep zijn, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 2}$, en $H \subset G$ een ondergroep van index n. Bewijs dat G een normale ondergroep heeft van index minstens 2 en hoogstens $n!$.

Normering: 100 = 10 (gratis) + 20 (4x5) + 20 (10+5+5) + 15 + 10 + 10 + 15

Kleurformule Als een eindige groep G op een eindige verzameling X werkt, en $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, dan geldt

$$\#\left(G\backslash\{f\colon X \to \{1,2,\ldots,n\}\}\right) = \frac{1}{\#G}\sum_{g\in G} n^{\#\langle g\rangle\backslash X}.$$

Sokken en schoenen Voor x en y in een groep G: $(xy)^{-1} = y^{-1}x^{-1}$.

Conjugatie en cykels Voor X een verzameling, $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, $x_1, \ldots, x_n$ in X verschillend, en τ in $\mathrm{Sym}(X)$ geldt: $\tau(x_1\ x_2 \cdots x_n)\tau^{-1} = (\tau(x_1)\ \tau(x_2) \cdots \tau(x_n))$.

Normale ondergroep Voor G een groep en N een ondergroep: N is normaal precies dan als voor alle $g \in G$: $gNg^{-1} \subset N$.

Homomorfismen en voortbrengers Een groepshomomorfisme $f\colon \langle S\rangle = G_1 \to G_2$ is bepaald door zijn beperking tot S.

Homomorfismen en ordes Voor $f\colon G_1 \to G_2$ een groepshomomorfisme en $x \in G_1$ van eindige orde geldt: $\mathrm{orde}(f(x))|\mathrm{orde}(x)$.

Homverzameling 1 Voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ en G een groep: $\#\mathrm{Hom}(C_n, G) = \#\{g \in G : g^n = e\}$.

Homverzameling 2 Voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, C_n een cyclische groep van orde n, g een voortbrenger van C_n, en H een groep geldt: ieder homomorfisme $f\colon C_n \to H$ is bepaald door $f(g)$, en voor elke h in H met $\mathrm{orde}(h)$ een deler van n bestaat er een homomorfisme $f\colon C_n \to H$ met $f(g) = h$.

Homverzameling 3 Voor G een groep en A een abelse groep: $\#\mathrm{Hom}(G, A) = \#\mathrm{Hom}(G_{\mathrm{ab}}, A)$.

Orde en cykels Voor $\sigma \in S_n$ met cykeltype $(k_1, k_2, \ldots, k_t)$: $\mathrm{orde}(\sigma) = \mathrm{kgv}(k_1, k_2, \ldots, k_t)$.

Commutator-ondergroep Voor $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$ oneven is de commutator-ondergroep van D_n gelijk aan de ondergroep $\langle\rho\rangle$ van rotaties.