

## Tentamen Algebra 1, 12 Juni 2008, 14:00-17:00

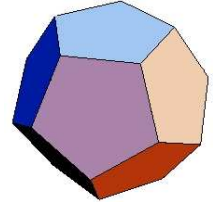
Motiveer al je antwoorden, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus.

Het gebruik van elektronische hulpmiddelen als rekenmachines en telefoons is niet toegestaan. Het raadplegen van meegebrachte literatuur en aantekeningen wel.

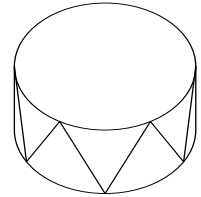
**Opgave 1.** Bepaal de rest bij deling van  $11^{(345^{678})}$  door 13.

**Opgave 2.** Laat  $G$  de rotatiegroep van de dodecaeder (regelmatig 12-vlak) zijn. Deze groep werkt transitief op de verzameling  $X$  van 12 zijvlakken.

- Hoeveel elementen heeft de stabilisator van zo'n zijvlak?
- Leid uit (a) af hoeveel elementen  $G$  heeft.
- Laat  $H$  de stabilisator van een hoekpunt zijn. Hoeveel banen heeft  $H$  op  $X$ ?



**Opgave 3.** Een *triangeltrommel* is een cilindrische trommel met 12 identieke driehoekjes op de rand, zoals in het plaatje. De boven- en onderkant zijn identiek en kunnen allebei gebruikt worden om op te trommelen. We noemen twee triangeltrommels hetzelfde als de één verkregen kan worden door de ander te draaien in de ruimte. We gaan de driehoekjes kleuren en we hebben 10 kleuren tot onze beschikking.



- Laat zien dat de symmetriegroep van ruimtelijke rotaties van een triangeltrommel vóór het kleuren 12 elementen heeft.
- Hoeveel echt verschillende triangeltrommels zijn er mogelijk?

**Opgave 4.** Hoeveel homomorfismen zijn er van de permutatiegroep  $S_4$  naar de cyclische groep  $C_4$ ? En van  $C_4$  naar  $S_4$ ?

**Opgave 5.** Definieer de groep  $G$  door  $G = (\mathbb{Z}/18\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/60\mathbb{Z})$ , en definieer het homomorfisme  $f: G \rightarrow G$  door  $f(x) = 4x = x + x + x + x$ .

- Wat is de orde van het element  $(4, 5) \in G$ ?
- Bepaal het aantal elementen van de kern van  $f$  en van het beeld van  $f$ .
- Voor  $n \geq 1$  definiëren we de  $n$ -voudige samenstelling  $f^n: G \rightarrow G$  door  $f^1 = f$  en  $f^n = f^{n-1} \circ f$  voor  $n \geq 2$ . Bepaal de kleinste  $n \geq 2$  waarvoor  $f^n = f$ .