

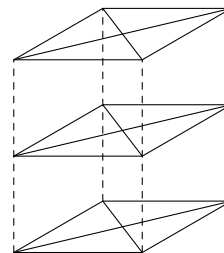
Tentamen Algebra 1, 14 juni 2007, 14:00 – 17:00

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1. Bepaal de laatste 2 cijfers (in decimale notatie) van 1406^{2007} en van $14^{(6^{2007})}$.

Opgave 2. Een *Leidsche vlieger* bestaat uit drie even grote vierkanten die op gelijke afstand boven elkaar staan. De symmetriegroep van een Leidsche vlieger wordt voortgebracht door een kwartslag om de verticale as en een halve slag om een horizontale as, en is isomorf met D_4 .

Elk van deze vierkanten is opgedeeld in vier driehoeken. We kleuren nu de twaalf driehoeken, waarbij we tien kleuren beschikbaar hebben. Hoeveel echt verschillende gekleurde Leidsche vliegers zijn er?



Opgave 3. Zij \mathbf{C}^* de vermenigvuldigingsgroep van complexe getallen ongelijk nul, en zij S_{2007} de permutatiegroep van $\{1, 2, \dots, 2007\}$.

- (a) Bepaal $\#\text{Hom}(S_{2007}, \mathbf{C}^*)$.
- (b) Bepaal $\#\text{Hom}(\mathbf{C}^*, S_{2007})$.

Opgave 4.

- (a) Welke van de drie volgende afbeeldingen definiëren homomorfismen?

$$f : (\mathbf{Z}/2007\mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/2007\mathbf{Z})^* \text{ gegeven door } x \mapsto x^4;$$

$$g : (\mathbf{Z}/2007\mathbf{Z})^* \rightarrow (\mathbf{Z}/2007\mathbf{Z})^* \text{ gegeven door } x \mapsto x^{2007};$$

$$h : S_4 \rightarrow S_4 \text{ gegeven door } x \mapsto x^4.$$

- (b) Bepaal voor de homomorfismen de orde van de kern en de orde van het beeld. (Je mag gebruiken dat $3^2 \cdot 223$ de priemfactorontbinding van 2007 is.)

Opgave 5. Definieer permutaties $\sigma, \tau \in S_9$ met de eigenschap dat voor alle $x \in \{1, 2, \dots, 9\}$ geldt:

$$\sigma(x) \equiv 2x + 1 \pmod{9};$$

$$\tau(x) \equiv 5x + 5 \pmod{9}.$$

- (a) Bepaal de orde van $\tau\sigma$ en de orde van de commutatoren $[\sigma, \tau]$ en $[\sigma\tau, \tau\sigma]$.
- (b) Bepaal de orde van de ondergroep van S_9 voortgebracht door σ en τ .