

## Tentamen Algebra 1, 16 augustus 2006, 10:00 – 13:00

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

**Opgave 1.** Definieer  $\sigma, \tau \in S_8$  door

$$\begin{aligned}\sigma &= (1\ 2)(4\ 5)(2\ 3)(5\ 6)(1\ 2\ 3)(6\ 7\ 8)(1\ 3\ 2), \\ \tau &= (4\ 5\ 6).\end{aligned}$$

- (a) Bepaal de orde van  $\sigma^3$  in  $S_8$ .
- (b) Bepaal de orde van  $\tau\sigma\tau^2$ .
- (c) Bereken  $\sigma^{7777^{1111}}$ .

**Opgave 2.** Zij  $\text{GL}_2(\mathbf{R})$  de groep van inverteerbare reële  $2 \times 2$ -matrices met matrixvermenigvuldiging. Definieer voor  $x \in \mathbf{R}$  de deelverzameling

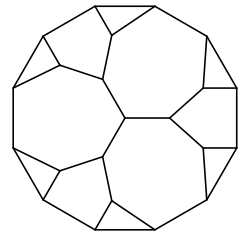
$$H_x = \{A \in \text{GL}_2(\mathbf{R}) : \det(A) > x\}.$$

Voor welke  $x \in \mathbf{R}$  is  $H_x$  een ondergroep van  $\text{GL}_2(\mathbf{R})$ ?

**Opgave 3.** Bepaal een geheel getal  $x$  dat voldoet aan de volgende congruenties.

$$\begin{aligned}x &\equiv 12 \pmod{15} \\ x &\equiv 8 \pmod{11} \\ x &\equiv 2 \pmod{25}\end{aligned}$$

**Opgave 4.** De symmetriegroep  $D_3$  van de regelmatige driehoek werkt op natuurlijke wijze op de verzameling vlakken van de hiernaast afgebeelde figuur. We kleuren elk van deze twaalf vlakken rood of groen. We noemen twee kleuringen equivalent als een element van  $D_3$  de ene in de andere overvoert. Hoeveel niet-equivalente kleuringen zijn er?



**Opgave 5.**

- (a) Definieer de afbeelding  $f : A_4 \rightarrow \{\pm 1\}$  door  $f(\text{id}) = 1$ ,  $f((a\ b)(c\ d)) = -1$  voor disjuncte twee-cykels  $(a\ b), (c\ d)$  en  $f((a\ b\ c)) = 1$ . Is  $f$  een homomorfisme?
- (b) Definieer voor een positief geheel getal  $n$  de afbeelding  $f_n : S_n \rightarrow \{\pm 1\}$  als volgt:  $f_n(\sigma) = -1$  als  $\sigma \in S_n$  precies één dekpunt heeft, en  $f_n(\sigma) = 1$  anders. Voor welke positieve gehele getallen  $n$  is  $f_n$  een homomorfisme?