Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Hertentamen Algebra 1, woensdag 19 augustus 2009, 10.00–13.00 uur

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt.

Opgave 1

Definieer de permutatie $\sigma \in S_9$ door

$$\sigma = (12)(76)(71)(34)(17)(78)(45)(98).$$

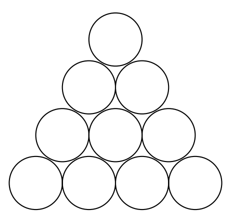
a. Schrijf σ in disjuncte-cykelnotatie.

b. Bestaat er een element $\tau \in S_9$ met $\tau\sigma\tau^{-1} = (1234)(567)(89)$?

c. Bepaal $(\sigma^{2009})^{2009}$ en $\sigma^{2009^{2009}}$.

Opgave 2

Een *Olijke Onderzetter* is een onderzetter die eruitziet als op het plaatje. Hij bestaat uit tien gekleurde schijven die aan beide kanten dezelfde kleur hebben. De schijven zijn verkrijgbaar in de twee kleuren oranje en olijfgroen.



Hoeveel echt verschillende Olijke Onderzetters zijn er?

Vergeet de achterkant niet.

Opgave 3

Bepaal het aantal elementen in $\mathrm{Hom}(A, B)$ als

a. $A = \mathbf{Z}$ en $B = S_3$;
b. $A = C_3$ en $B = C_9$;
c. $A = D_9$ en $B = C_{18}$;
d. $A = D_4$ en $B = V_4$.

Hierbij geven we met $\mathbf{Z}$ de optelgroep van gehele getallen aan, met S_n de permutatiegroep op een verzameling van n elementen, met C_n een cyclische groep van orde n, met D_n de dihedrale groep van $2n$ elementen en met V_4 de viergroep van Klein.

Opgave 4

Zij G de ondergroep van $\mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ gegeven door

$$G = \{ \begin{pmatrix} a & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ a, b \in \mathbf{R}^*, c \in \mathbf{R}\},$$

en zij H de deelverzameling van G gegeven door

$$H = \{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & c \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \ : \ b \in \mathbf{R}^*, c \in \mathbf{R}\}.$$

a. Laat zien dat H een ondergroep van G is en dat geldt $H \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R}^*$.

b. Is H normaal in G?

c. Geldt $G \cong \mathbf{R} \times \mathbf{R}^* \times \mathbf{R}^*$?

Opgave 5

Het jaartal $2009 = 7 \cdot 7 \cdot 41$ is niet priem.

a. Bewijs dat de groep $(\mathbf{Z}/2009\mathbf{Z})^*$ een product van twee cyclische groepen is.

b. Wat is de maximale orde van een element van $(\mathbf{Z}/2009\mathbf{Z})^*$?