Tentamen Algebra 1, 21 Mei 2002

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus.

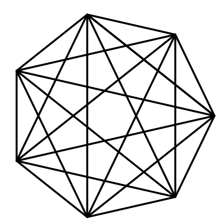
1. (a) Wat is de orde van het element $\sigma = (123)(234567)(78)$ in de S_8?
(b) Hoeveel dekpunten heeft σ^2 op de verzameling $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$?
(c) Hoeveel elementen heeft de conjugatieklasse van σ in S_8?

2. Waarschuwing: $7^{7^7} = 7^{(7^7)} \neq \left(7^7\right)^7 = 7^{7^2}$.
(a) Wat is de orde van het element $(7 \bmod 30)$ van $(\mathbf{Z}/30\mathbf{Z})^*$?
(b) Bepaal de rest bij deling van $7^{7^{7^7}}$ door 30.
(c) Bewijs dat voor elke $n \in \mathbf{Z}_{\geq 1}$ de rij

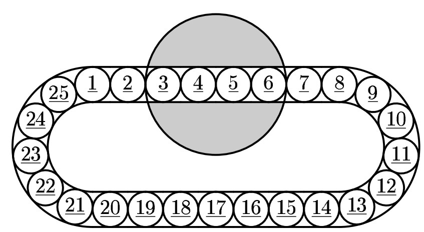
$$(7 \bmod n), (7^7 \bmod n), (7^{7^7} \bmod n), (7^{7^{7^7}} \bmod n), \ldots$$

in $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ bestaat uit een eindig beginstuk, en daarna een constante staart.

3. De symmetriegroep D_7 van de regelmatige 7-hoek werkt op de verzameling verbindingslijnstukken van verschillende hoekpunten.
(a) Hoeveel banen heeft deze werking?
(b) We kleuren nu elk van deze lijnstukken blauw of rood. Op hoeveel niet-equivalente manieren kan dat? (Twee kleuringen heten equivalent als een element van D_7 de ene in de ander overvoert.)



4. Hiernaast is een schuifpuzzeltje afgebeeld waarbij 25 schijfjes in een geultje achter elkaar liggen. Er zijn steeds twee zetten mogelijk: de 25 schijfjes cyclisch doorschuiven, of de grijze schijf 180 graden om zijn middelpunt draaien. In de stand op de afbeelding zou die laatste zet 3 en 6 verwisselen, en 4 en 5 verwisselen.



Bewijs de volgende uitspraken. Je mag steeds de voorgaande uitspraak gebruiken, ook als je die niet kon bewijzen!

(a) Er is geen zettenreeks waarvan het totaal effect is dat schijfje 1 en 2 van plek wisselen, en elk ander schijfje op zijn plaats blijft.
(b) De ondergroep $H_1 = \langle (14)(23), (25)(34) \rangle$ van S_5 is isomorf met D_5, en (12345) is bevat in H_1.
(c) De ondergroep $H_2 = \langle (12345), (23456) \rangle$ van S_6 bevat een drie-cykel.
(d) $H_2 = A_6$.
(e) Voor elke $\sigma \in A_{25}$ is er een zettenreeks die de 25 schijfjes permuteert als σ.
(f) Een zettenreeks als bedoeld bij (a) bestaat wèl als we 26 in plaats van 25 schijfjes in de lus hebben.