Tentamen Algebra 1, 27 juni 2013

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus en aantekeningen gebruiken, maar het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan. Je mag niet naar opgaven uit het dictaat verwijzen.

Opgave 1

a) We definiëren

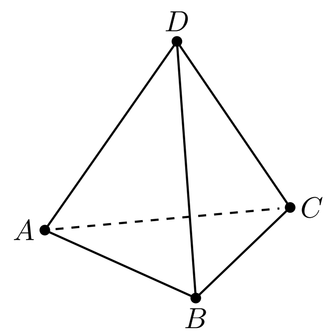
$$a = 20^{13^{27^6}} = 20^{\left(13^{\left(27^6\right)}\right)}.$$

Wat is de rest van a bij deling door 27? Laat uiteraard ook je berekening zien.

b) Bewijs dat voor $m = 15^3 = 3^3 \cdot 5^3 = 3375$ geldt $a \equiv 5^5 \pmod{m}$.

Opgave 2

Zij T de tetraëder met hoekpunten A, B, C en D zoals in de figuur.
Zij $G = \mathrm{Sym}(T)$ de symmetriegroep van T.
Zij $g_0 \in G$ de spiegeling in het vlak door C, D en het midden van AB.
Zij $g_1 \in G$ de spiegeling in het vlak door A, B en het midden van CD.
Zij ℓ de lijn door D die loodrecht staat op het vlak door A, B en C.
Zij $g_2 \in G$ de draaiing om ℓ die A stuurt naar B.
Definieer $g_3 = g_1 \circ g_0$ en $g_4 = g_2 \circ g_1$.

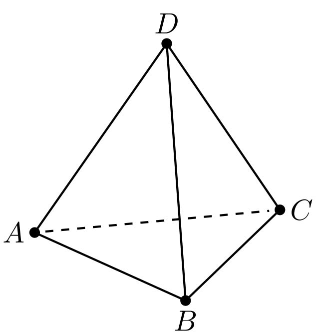


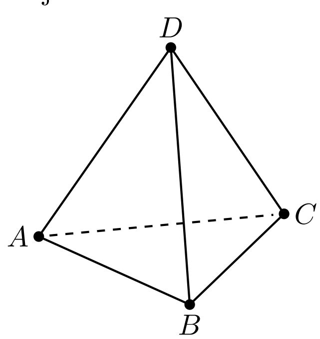
a) Geef voor elke $0 \leq i \leq 4$ de permutatie van de hoekpunten die g_i induceert (als product van disjuncte cykels in $S(\{A, B, C, D\})$).

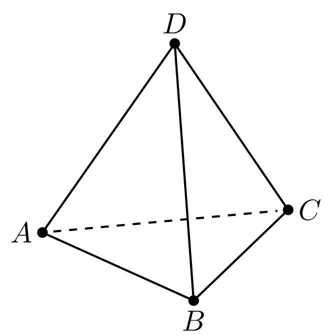
b) Voor elke $0 \leq i \leq 4$, zij $G_i = \langle g_i \rangle$ de ondergroep van G voortgebracht door g_i. Geef voor elke $0 \leq i \leq 4$ de banen van de werking van G_i op de verzameling $X = \{AB, AC, AD, BC, BD, CD\}$ van de zes zijden van T.

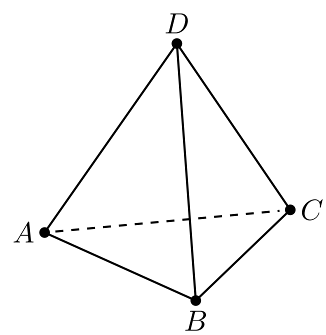
c) Wat is de orde van G?

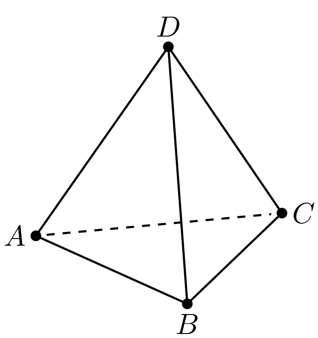
d) Een Tibetaanse Tetraëder is een tetraëder waarvan alle zijvlakken geel zijn en elk van de zes zijden een kleur rood, blauw of groen heeft. We noemen twee Tibetaanse Tetraëders hetzelfde als ze door een symmetrie in elkaar over te voeren zijn. Hoeveel echt verschillende Tibetaanse Tetraëders zijn er?

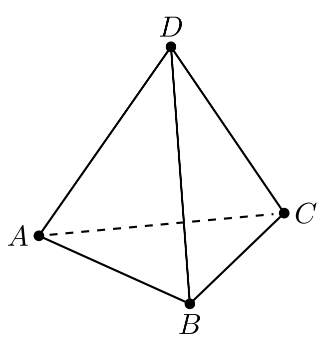


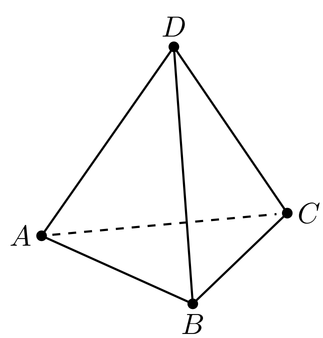


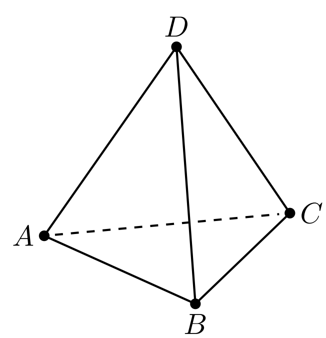












(Deze tetraëders zijn er voor je klad en worden niet bekeken bij het nakijken)

Opgave 3
Geef voor elke uitspraak óf een bewijs óf een tegenvoorbeeld. (Dit kan in een paar regels.)
Voor de zekerheid: de orde van een eenheidselement is 1; en 1 is een macht van 2, want $2^0 = 1$.
a) In elke abelse groep vormen de elementen van eindige orde een ondergroep.
b) In elke abelse groep vormen de elementen van oneindige orde samen met het eenheidselement een ondergroep.
c) In elke abelse groep vormen de elementen van (eindige) even orde samen met het eenheidselement een ondergroep.
d) In elke abelse groep vormen de elementen van (eindige) oneven orde een ondergroep.
e) In elke abelse groep vormen de elementen waarvan de orde een macht van 2 is een ondergroep.
f) In elke groep vormen de elementen waarvan de orde een macht van 2 is een ondergroep.

Opgave 4
a) Zij n een positief geheel getal en $g \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ een element. Laat zien dat g een voortbrenger is van de additieve groep $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ dan en slechts dan als er geldt $g \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.
b) Zij n een positief geheel getal en C_n een cyclische groep van orde n. Concludeer uit **(a)** dat het aantal elementen $g \in C_n$ waarvoor geldt $C_n = \langle g \rangle$ gelijk is aan $\varphi(n)$.
c) Zij $p = 61$. Hoeveel primitieve wortels bevat het lichaam $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$?
d) Is $\overline{2} \in \mathbb{F}_{61}$ een primitieve wortel?

Opgave 5
a) Zij $f\colon G_1 \to G_2$ een homomorfisme van groepen. Laat $N \triangleleft G_2$ een normale ondergroep van G_2 zijn waarvoor het quotient G_2/N abels is. Bewijs dat het inverse beeld $f^{-1}(N)$ een normale ondergroep van G_1 is en dat de commutator ondergroep $[G_1, G_1]$ bevat is in $f^{-1}(N)$.
b) Zij $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ de groep van inverteerbare reële 2×2-matrices en $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ de ondergroep van matrices van determinant 1. Zij n een positief geheel getal. Zoals gebruikelijk schrijven we S_n voor de permutatiegroep van $\{1, 2, \ldots, n\}$ en A_n voor de ondergroep van alle even permutaties. Stel $g\colon S_n \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ is een homomorfisme. Bewijs dat $g(A_n)$ bevat is in $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$.