

Tentamen Algebra 1, Leiden, 6 juni 2005, 10:00-13:00

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus. De uitslag staat hedenavond op de webpagina.

Opgave 1. Laat $\sigma = (123)(345)(567) \in S_7$.

- (a) Bepaal de orde van σ .
- (b) Bewijs dat de conjugatieklasse van σ in S_7 precies $6! = 720$ elementen heeft.
- (c) Bepaal $(\sigma^{2005})^{2005}$ en $\sigma^{(2005^{2005})}$.

Opgave 2. Bepaal een geheel getal x met $x \equiv 2 \pmod{9}$ en $x \equiv 1 \pmod{7}$. Is er ook een geheel getal y met $y \equiv 2 \pmod{9}$ en $y \equiv 1 \pmod{21}$?

Opgave 3. Laat G een groep zijn, en $x, y \in G$.

- (a) Stel dat x en y commuteren. Bewijs dat $(xy)^n = x^n y^n$ geldt voor alle gehele $n \geq 1$.
- (b) Neem omgekeerd aan dat $(xy)^n = x^n y^n$ voor alle gehele $n \geq 1$. Volgt daaruit dat x en y commuteren?
- (c) Stel dat k een positief geheel getal is met $x^k = 1$. Stel ook dat x commuteert met de commutator $[x, y]$. Bewijs dat $[x, y]^k = 1$.

Opgave 4. Laat D_5 de diëdergroep van orde 10 zijn, en laat C_{10} de cyclische groep van orde 10 zijn.

- (a) Zijn C_{10} en D_5 isomorf? (Bewijs je antwoord!)
- (b) Bepaal $\#\text{Hom}(C_{10}, D_5)$.
- (c) Bepaal $\#\text{Hom}(D_5, C_{10})$.

Opgave 5. Een Vijfhuizer prisma is een veelvlak met een regelmatige vijfhoek als onder- en bovenvlak, en vijf vierkanten als zijvlakken.

- (a) Bewijs dat de rotatiegroep van een Vijfhuizer prisma isomorf is met de D_5 .
- (b) We kleuren de 7 vlakken van een Vijfhuizer prisma met twee kleuren. We noemen twee kleuringen hetzelfde als de één door een draaiing in de ander overgaat. Hoeveel verschillende kleuringen zijn er mogelijk?

