Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

**Tentamen Algebra 1, woensdag 9 juni 2004, 10.00–13.00 uur**

*Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt.*

*Notatie.* Voor een niet-negatief geheel getal $n$ geven we met $S_n$ de verzameling permutaties van $\{1, 2, \ldots, n\}$ aan.

**Opgave 1.** (a) Schrijf een permutatie $\sigma \in S_9$ op met de eigenschap dat voor alle $x \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ geldt:

$$\sigma(x) \equiv 5x + 2 \bmod 9.$$

(b) Bereken de orde van $\sigma$ en van $\sigma^{999}$.

**Opgave 2.** Stel $G$ is een groep met de eigenschap dat elk element van $G$ geconjugeerd is met zijn inverse. Bewijs: voor alle $a$, $b \in G$ zijn de elementen $ab$ en $a^{-1}b^{-1}$ geconjugeerd.

**Opgave 3.** Een *Ajaxtaart* is een ronde marsepeinen taart met zeven kaarsjes, één in het midden en de andere zes regelmatig verdeeld langs de rand; elk kaarsje is rood of wit, maar niet alle kaarsjes hebben dezelfde kleur. Hoeveel echt verschillende Ajaxtaarten zijn er?

**Opgave 4.** Zij $D_5$ de diëdergroep van orde 10.

(a) Hoeveel ondergroepen heeft $D_5$? En hoeveel hiervan zijn normaal?

(b) Hoeveel groepshomomorfismen $D_5 \to S_3$ zijn er?

**Opgave 5.** (a) Bewijs: $a^6 \equiv a^2 \bmod 60$ voor alle $a \in \mathbf{Z}$.

(b) Stel dat $n$ een positief geheel getal is met de eigenschap dat voor alle $a \in \mathbf{Z}$ geldt: $a^6 \equiv a^2 \bmod n$. Bewijs: $n$ is een deler van 60.