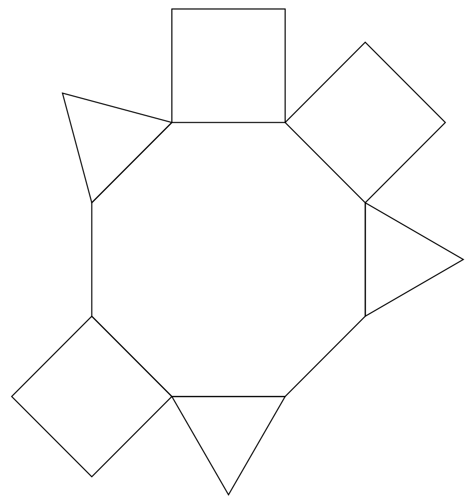
Hertentamen Algebra 1
10 augustus 2011

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1
In een dorpje op 10 kilometer van het Boliviaanse Manteles maakt men geheel blauwe tafelkleden in de vorm van een regelmatige achthoek. Aan sommige kanten wordt een vierkant of een gelijkzijdige driehoek genaaid (ook blauw en met de lengte van de zijden gelijk aan de lengte van de zijden van de achthoek, zie de figuur). Het maakt voor deze opgave niet uit dat de vierkanten en driehoeken gerelateerd zijn aan de status van de personen aan tafel. De tafelkleden hebben geen specifieke onder- of bovenkant. We noemen twee tafelkleden hetzelfde als ze door draaien en/of omkeren in elkaar over te voeren zijn. Hoeveel echt verschillende tafelkleden kan men maken?



Opgave 2
Hoeveel homomorfismen zijn er van de permutatiegroep S_9 naar de groep

$$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/5\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \quad ?$$

Opgave 3
a) Bewijs dat 3 een primitieve wortel is modulo het priemgetal 101.
b) Geef alle restklassen $x \in \mathbb{Z}/101\mathbb{Z}$ waarvoor geldt $x^2 = \overline{1}$.
c) Geef alle restklassen $x \in \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ waarvoor geldt $x^2 = \overline{1}$.
d) Geef alle restklassen $x \in \mathbb{Z}/808\mathbb{Z}$ waarvoor geldt $x^2 = \overline{1}$.
Bewijs dat je in **b**, **c** en **d** alle oplossingen gevonden hebt.

Zie achterkant voor meer opgaven

Opgave 4
Zij $S(\mathbb{R})$ de groep van alle bijecties van $\mathbb{R}$ naar zichzelf. Zij $G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R})$ de ondergroep van $S(\mathbb{R})$ bestaande uit alle *affiene afbeeldingen*, dat wil zeggen

$$G = \mathrm{Aff}(\mathbb{R}) = \{x \mapsto ax + b \ : \ a \in \mathbb{R}^*,\ b \in \mathbb{R}\}.$$

a) Laat zien dat de commutator ondergroep $[G, G]$ gelijk is aan de ondergroep van alle translaties, dat wil zeggen

$$[G, G] = \{x \mapsto x + b \ : \ b \in \mathbb{R}\}.$$

b) Laat zien dat G_{ab} isomorf is met $\mathbb{R}^*$.

Opgave 5
Zij $A \subset S_{10}$ de verzameling van alle elementen van orde 12 in de groep S_{10}.
a) Geef alle cykeltypes van elementen σ in A.
b) Geef alle cykeltypes van derde machten σ^3 van elementen σ in A.
c) Laat zien dat het aantal elementen $\sigma \in A$ waarvoor σ^3 geen dekpunten heeft, gelijk is aan

$$\frac{10!}{4!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5.$$

d) Hoeveel elementen σ bevat A waarvoor

$$\sigma^{555^{2011}}$$

geen dekpunten heeft?

Cijfers staan waarschijnlijk 26 augustus in de gebruikelijke cijferlijst