Hertentamen Algebra 1, woensdag 11 augustus 2010, 10.00u–13.00u
Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan.

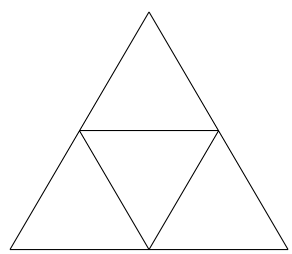
Opgave 1. Definieer $\sigma \in S_{12}$ door

$$\sigma = (1\,2\,3)(3\,4\,5\,6)(6\,7\,8\,9\,10).$$

(a) Bepaal $\sigma^{1337^{2010}}$.
(b) Bevat S_{12} een element van orde 60? Zo ja, vind zo'n element, zo nee, bewijs dat het niet bestaat.

Opgave 2. Bepaal alle getallen $n \in \mathbf{Z}$ die de volgende drie eigenschappen bezitten: $n \equiv 2 \bmod 6$, $3n \equiv 1 \bmod 17$ en $600 \leq n \leq 700$.

Opgave 3. Een *zomerdriehoek* is een plat bouwsel bestaande uit negen staafjes van gelijke lengte, zoals in de illustratie. De staafjes kunnen elk geel of blauw zijn. We noemen twee zomerdriehoeken gelijk als de één verkregen kan worden door de ander te draaien in de ruimte.



Hoeveel verschillende zomerdriehoeken zijn er?

Opgave 4. Laat D_5 de diëdergroep van orde 10 zijn en V_4 de viergroep van Klein. Bepaal $\#\mathrm{Hom}(D_5, V_4)$.

Opgave 5. Voor iedere positieve gehele m noteren we met $(\mathbf{Z}/m\mathbf{Z})^*$ de eenhedengroep van de ring $\mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.
Zij n een positief geheel getal. Zij $\phi : (\mathbf{Z}/n^2\mathbf{Z})^* \to (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ de afbeelding gegeven door $\phi(a \bmod n^2) = a \bmod n$.
(a) Bewijs dat ϕ een surjectief groepshomomorfisme is.
(b) Bewijs dat de kern van ϕ cyclisch is van orde n.

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.