TENTAMEN ALGEBRA 2, VRIJDAG 18 JANUARI, 10.00–13.00

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen

1. Beschouw in de ring $\mathbf{Z}[i]$ de idealen $I = (8)$ en $J = (5 + 5i)$. Geef een $z \in \mathbf{Z}[i]$ zodat $I + J = (z)$. Idem voor IJ en $I \cap J$.

2. Zij $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ de complexe nulpunten van $X^3 - 3X^2 + 1$. Bereken $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \alpha_3^3$.

3. Laat zien dat $27X^3 - 13X^2 + 180$ irreducibel is in $\mathbf{F}_{13}[X]$, $\mathbf{Z}[X]$, en $\mathbf{Q}[X]$.

4. Zij $R = \mathbf{Z}[X, Y]/(XY - 1)$ en S een commutatieve ring. Bewijs dat er een bijectie is tussen de verzameling ringhomomorfismen $R \to S$ en de eenhedengroep S^*.

5. Zij $R = \mathrm{Mat}_n(\mathbf{Z})$ en beschouw het (links) R-moduul $M = \mathbf{Z}^n$, waarvan de elementen kolomvectoren van n gehele getallen zijn. De actie van R op M is door matrixvermenigvuldiging. Laat zien dat $\mathrm{End}_R M = \mathbf{Z}$.