HERTENTAMEN ALGEBRA 2
MAANDAG 25 MAART, 10.00–13.00

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen

1. Zij $\alpha = 25 + 53i$ en $\beta = -2 + 8i$ in $\mathbf{Z}[i]$. Geef q en r zodat $\alpha = q\beta + r$ en $N(r) < N(\beta)$. Geef een $\gamma \in \mathbf{Z}[i]$ zodat $(\alpha, \beta) = (\gamma)$. Is het ideaal (α, β) een priemideaal?

2. Beschouw het polynoom

$$f(X) = (X - \alpha_1)(X - \alpha_2)(X - \alpha_3) = X^3 - s_1 X + s_2 X^2 - s_3$$

in $\mathbf{C}[X]$, met $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbf{C}$. Druk het complexe getal

$$(-\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3)(\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3)$$

uit in s_1, s_2 en s_3.

3. Ontbind de volgende polynomen in irreducibele factoren:
(1) $X^4 + 1$ in $\mathbf{F}_2[X]$;
(2) $X^4 - X - 1$ in $\mathbf{F}_3[X]$;
(3) $X^4 + 8X + 35$ in $\mathbf{Z}[X]$;
(4) $X^4 - X^3 - 3X^2 + 843X - 840$ in $\mathbf{Q}[X]$.

4. Zij $d \geq 1$ een geheel getal. Laat zien dat de eenhedengroep van $\mathbf{Z}[\sqrt{-d}]$ eindig is. Laat zien dat de eenhedengroep van $\mathbf{Z}[\sqrt{2}]$ oneindig is (hint: toon eerst aan dat $3 + 2\sqrt{2}$ een eenheid is).

5. Zij A en B commutatieve ringen, en $f, g\colon A \to B$ ringhomomorfismen. Laat zien dat $\ker(g - f)$ een deelring is van A.

Is er voor elke commutatieve ring A en deelring $A_0 \subset A$ een commutatieve ring B en een paar ringhomorfismen $f, g\colon A \to B$ zodat $A_0 = \ker(g - f)$?