

Tentamen Algebra 2, vrijdag 12 december 2008, 10:00–13:00 uur

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar geen elektronische hulpmiddelen zoals rekenmachines.

Opgave 1. Laat zien dat er een ringhomomorfisme $f: \mathbf{Z}[i] \rightarrow \mathbf{F}_{73}$ bestaat met $\ker f = (73, 27 - i)$, en bepaal een voortbrenger van $\ker f$.

Opgave 2. Stel dat α , β en γ complexe getallen zijn die voldoen aan

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma &= 2, \\ \alpha^{-1} + \beta^{-1} + \gamma^{-1} &= 4 \cdot (\alpha + \beta + \gamma), \\ \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 &= (\alpha + \beta + \gamma)^2 + 24.\end{aligned}$$

Bepaal de coëfficiënten van het polynoom $(X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$.

Opgave 3. Ontbind $X^3 - 3X^2 - X - 3$ in elk van de ringen $\mathbf{F}_2[X]$, $\mathbf{F}_3[X]$, $\mathbf{F}_5[X]$ en $\mathbf{Q}[X]$ in irreducibele factoren.

Opgave 4. Bepaal voor elk complex getal a de Jordan-normaalvorm van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}.$$

Opgave 5. Stel dat A en B ringen zijn en dat $f, g: A \rightarrow B$ twee surjectieve ringhomomorfismen zijn met $\ker f = \ker g$. Bewijs dat er een ringautomorfisme σ van B is met $f = \sigma \circ g$.