Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, 14 december 2007, 10:00 – 13:00

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1. Laat α, β en γ de complexe nulpunten van $f = X^3 + X^2 + 1$ zijn. Bepaal

$$\det \begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ \beta & \gamma & \alpha \\ \gamma & \alpha & \beta \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Bepaal een voortbrenger van elk van de volgende idealen van $\mathbf{Z}[i]$.
(a) $(17, 12 + 3i)$
(b) $(19 + i) + (37 - 2i)$
(c) $(2007 + 2007i) \cap (2)$

Opgave 3.
(a) Bepaal alle monische, irreducibele polynomen van graad 2 in $\mathbf{F}_2[X]$ en in $\mathbf{F}_3[X]$.
(b) Ontbind $X^5 - X + 1$ in irreducibele factoren in $\mathbf{F}_2[X]$ en in $\mathbf{F}_3[X]$.
(c) Ontbind $X^5 - X + 1$ in irreducibele factoren in $\mathbf{Z}[X]$.

Opgave 4. Bepaal voor alle positieve $n \in \mathbf{Z}$ de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van de complexe $n \times n$ bovendriehoeksmatrix met enen op en boven de diagonaal (en nullen eronder).

Opgave 5. Zij a een reëel getal en definieer het $\mathbf{R}[X]$-moduul $M = \mathbf{R}[X]/(X^2 - a)$. Toon aan dat M precies twee deelmodulen heeft als a negatief is, precies drie als a nul is, en precies vier als a positief is. (Inclusief de "triviale" deelmodulen 0 en M.)