Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, vrijdag 15 december 2006, 10.00–13.00 uur

Motiveer steeds je antwoord (alleen ja/nee is niet voldoende!), en noem de stellingen die je gebruikt.

1. Laat $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4 \in \mathbf{C}$ de complexe nulpunten zijn van het polynoom $f = X^4 + 15X + 12$. Bereken $\sum_{i=1}^4 \alpha_i^4$ en de discriminant $\Delta(f)$ van f.

2. Bepaal voor elk van de volgende drie idealen in welke van de ringen $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ en $\mathbf{F}_3[X]$ het priem is:

$$(X^3 - 18X + 12), \qquad (X^3 - 18X + 12,\ 5), \qquad (X^3 - 18X + 12,\ X - 1).$$

(Er worden dus $3 \times 3 = 9$ antwoorden verwacht....)

3. Definieer de deelverzameling $R \subset \mathbf{Q}$ als

$$R = \{\frac{a}{3^k} \in \mathbf{Q} : a \in \mathbf{Z}, k \in \mathbf{Z}_{\geq 0}\}.$$

a. Laat zien dat R een deelring is van $\mathbf{Q}$. Is het een hoofdideaaldomein?
b. Zijn de quotientringen $R/2R$ en $R/3R$ lichamen?
c. Ga na of de eenhedengroep R^* een vrije abelse groep is. Is R^* eindig voortgebracht?
d. Is de optelgroep van R vrij? Eindig voorgebracht?

4. Zij $A \subset \mathbf{Z}^3$ de ondergroep gegeven door

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 : 3x + y + 4z \equiv 0 \bmod 6 \text{ en } x + 2z \equiv 0 \bmod 3\}.$$

a. Bepaal een basis voor de abelse groep A.
b. Bepaal de orde van de abelse groep $\mathbf{Z}^3/A$. Is $\mathbf{Z}^3/A$ cyclisch?

5. Zij $M = (a_{ij})_{i,j=1}^{2006}$ de complexe matrix met coëfficiënten $a_{ij} = (-1)^{i+j}$. Bepaal de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van M.

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.
Schrijf vooral je collegekaartnummer op je tentamen!