Tentamen Algebra 2, Leiden, 16 december 2005

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus.

Opgave 1. Ontbind de volgende ring-elementen in irreducibelen:
(a) $X^3 - Y^3$ in de ring $\mathbb{Q}[X,Y]$;
(b) $X^3 - X^2 - 8X + 6$ in de ring $\mathbb{Z}[X]$;
(c) $X^4 - X^2 + 4X + 3$ in de ring $\mathbb{Q}[X]$;
(d) $2i + 9$ in de ring $\mathbb{Z}[i]$;

Opgave 2. Definieer de ondergroepen $A, B \subset \mathbb{Z}^3$ door

$$A = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 : a + b + c = 0\};$$
$$B = \{(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3 : a + 2b + 3c \equiv 0 \bmod 6\}.$$

Geef een minimaal stel voortbrengers voor A, voor B, en voor $A \cap B$.

Opgave 3. Laat $R = \{f \in \mathbb{C}[X] : f(0) \in \mathbb{Z}\}$.
(a) Laat zien dat R een deelring is van $\mathbb{C}[X]$.
(b) Laat zien dat $R/2R \cong \mathbb{F}_2$.

Definieer $I = \{f : f \in R \text{ met } f(\pi) = 0\}$. Hier is $\pi \in \mathbb{C}$ de halve omtrek van de eenheidscirkel.
(c) Laat zien dat I een maximaal ideaal is van R.
(d) Is I een hoofdideaal van R?
(e) Laat zien dat de ring $R/2I$ isomorf is met $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{C}$.

Opgave 4. Laat $\alpha_1, \ldots, \alpha_7 \in \mathbb{C}$ zodat $X^7 - 2X + 2 = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_7)$.
(a) Bepaal $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_7$.
(b) Laat zien dat $\alpha_1^3 + \alpha_2^3 + \cdots + \alpha_7^3 = 0$.
(c) Bepaal $\alpha_1^7 + \alpha_2^7 + \cdots + \alpha_7^7$.

— SUCCES —