Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, vrijdag 18 december 2009, 10.00–13.00 uur

Motiveer steeds je antwoord (alleen ja/nee is niet voldoende!), en vermeld welke stellingen je gebruikt.

1. Zij $\mathbf{Z}[i]$ de ring van gehele getallen van Gauss.
  a. Bepaal de ggd van 65 en $1+5i$ in $\mathbf{Z}[i]$.
  b. Hoeveel verschillende ringhomomorfismen $\mathbf{Z}[i] \to \mathbf{Z}/65\mathbf{Z}$ bestaan er?

2. Beschouw in $\mathbf{Z}[X]$ de polynomen $f = X^5 - 2X + 3$ en $g = X^{2009} + X^{1218} + 1$.
  a. Laat $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_5 \in \mathbf{C}$ de complexe nulpunten zijn van f. Bereken $\sum_{i=1}^{5} \alpha_i^5$.
  b. Laat $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{2009} \in \mathbf{C}$ de complexe nulpunten zijn van g. Bereken $\sum_{i=1}^{2009} \beta_i^{100}$.

3. Bepaal voor elk van de volgende drie idealen in welk van de ringen $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ en $\mathbf{F}_3[X]$ het priem is:

$$(X^4 - 2X + 6), \qquad (X^4 - 2X + 6,\ X - 1), \qquad (X^4 - 2X + 6,\ 13).$$

(Er worden dus $3 \times 3 = 9$ antwoorden met motivatie verwacht....)

4. Zij $A \subset \mathbf{Z}^3$ de ondergroep gegeven door

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 : x + 2y + 3z \equiv 0 \bmod 9 \text{ en } x + y + z \equiv 0 \bmod 3\}.$$

  a. Bepaal een basis voor de abelse groep A.
  b. Bepaal de orde van de abelse groep $\mathbf{Z}^3/A$. Is $\mathbf{Z}^3/A$ cyclisch?

5. Zij $M = (a_{ij})_{i,j=1}^{2009}$ de complexe matrix met coëfficiënten

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{voor } i + j \text{ oneven;} \\ 1 & \text{voor } i + j \text{ even.} \end{cases}$$

Bepaal het karakteristieke polynoom, het minimumpolynoom en de Jordan-normaalvorm van M.

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.
Schrijf vooral je collegekaartnummer op je tentamen!