Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, vrijdag 19 december 2003, 10.00–13.00 uur

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt.

1. Zij $f = X^3 + 19X^2 + 12X + 3 \in \mathbf{C}[X]$ het polynoom van de dag.
  a. Laat zien dat de drie complexe nulpunten α_1, α_2 en α_3 van f verschillend zijn.
  b. Bereken $\alpha_1^4 + \alpha_2^4 + \alpha_3^4$.

2. Zij $f : R_1 \to R_2$ een ringhomomorfisme en $f_* : R_1^* \to R_2^*$ het geïnduceerde homomorfisme op de eenhedengroepen. Geef voor de volgende uitspraken een bewijs of een tegenvoorbeeld.
  a. Als f surjectief is, dan is f_* surjectief.
  b. Als f_* surjectief is, dan is f surjectief.
  c. Als f injectief is, dan is f_* injectief.
  d. Als f_* injectief is, dan is f injectief.

3. Bepaal voor elk van de volgende drie idealen of het priem is in respectievelijk $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ en $\mathbf{F}_2[X]$:

$$(X^3 + 2X + 1), \qquad (X^3 + 2X + 1,\ 3), \qquad (X^3 + 2X + 1,\ X - 1).$$

4. Zij $H \subset \mathbf{Z}^3$ de ondergroep gegeven door

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbf{Z}^3 : 6x + 3y + 2z \equiv 0 \bmod 12\}.$$

  a. Bepaal een basis voor H en schrijf het element $(0, 0, 6) \in H$ ten opzichte van deze basis.
  b. Bepaal de structuur van de abelse groep $\mathbf{Z}^3/H$.

5. Bepaal de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van de complexe matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.

Schrijf vooral je collegekaartnummer op je tentamen!