HERKANSING ALGEBRA 2

2 februari 2012, 10-13 uur

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

De waardering van de opgaven is onder voorbehoud.

Aan de achterzijde staat één opgave.

OPGAVE 1.

5 a) Bepaal $\alpha \in \mathbb{Z}[i]$ met $(\alpha) = (3+5i, 8)$. Is $(3+5i, 8)$ een priemideaal in $\mathbb{Z}[i]$?

5 b) Ga na of $\left(X^2 - X(Y^2 - 2Y + 1) + Y^2 - Y\right)$ een priemideaal in $\mathbb{C}[X, Y]$ is.

5 c) Ga na of $(X^4 - 14X + 28)$, $(X^4 - 14X + 28, 3)$ priemidealen in $\mathbb{Z}[X]$ zijn.

OPGAVE 2. Gegeven is het polynoom $f_c = X^3 + 3X^2 + 6X + c$, waarbij $c \in \mathbb{C}$.

5 a) Druk de discriminant van f_c uit in c. Voor welke waarden van $c \in \mathbb{C}$ heeft f_c meervoudige nulpunten?

5 b) Zij p een priemgetal. Onderzoek of f_p irreducibel is in $\mathbb{Z}[X]$.

OPGAVE 3. We beschouwen de ring van formele machtreeksen

$$\mathbb{Z}[[X]] = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \,:\, a_n \in \mathbb{Z} \right\}$$

en het ringhomomorfisme

$$f \,:\, \mathbb{Z}[[X]] \to \mathbb{Z} \,:\, \sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \mapsto a_0.$$

3 a) Bepaal $\mathbb{Z}[[X]]^*$.

3 b) Zij p een priemgetal. Laat zien dat (X, p) een maximaal ideaal is van $\mathbb{Z}[[X]]$.

5 c) Zij M een maximaal ideaal van $\mathbb{Z}[[X]]$. Bewijs dat $f(M)$ een maximaal ideaal is van $\mathbb{Z}$.

4 d) Zij M een maximaal ideaal van $\mathbb{Z}[[X]]$. Bewijs dat $M = (X, p)$ voor zeker priemgetal p.

ZOZ

OPGAVE 4. Zij R een domein. Gegeven is het R-moduul M bestaande uit alle oneindige rijtjes

$$(x_1, x_2, x_3, \ldots) \quad (x_i \in R \text{ voor alle } i \geq 0)$$

met componentsgewijze optelling en scalaire vermenigvuldiging.

5 a) Laat zien dat de afbeelding

$$f : M \to M : (x_1, x_2, x_3, \ldots) \mapsto (x_3 - 2x_2 + x_1, x_4 - 2x_3 + x_2, x_5 - 2x_4 + x_3, \ldots)$$

een surjectief R-moduul-homomorfisme is.

5 b) Zij N de kern van f. Laat zien dat N een eindig voortgebracht, vrij R-moduul is en bepaal de rang van N.