Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Hertentamen Algebra 2, vrijdag 20 februari 2009, 14:00–17:00 uur

Motiveer steeds je antwoord en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar geen elektronische hulpmiddelen zoals rekenmachines.

Opgave 1. Bepaal de Jordan-normaalvorm en het minimumpolynoom van de complexe 3×3-matrix

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Opgave 2. Bestaan er een ringhomomorfisme $f\colon R \to S$ en een nuldeler $r \in R$ zodanig dat $f(r)$ een eenheid van S is? Geef een voorbeeld of bewijs het tegendeel.

Opgave 3. Ontbind $X^4 - X^2 + 2X + 3$ in elk van de ringen $\mathbf{F}_2[X]$, $\mathbf{F}_3[X]$ en $\mathbf{Q}[X]$ in irreducibele factoren.

Opgave 4. Laat K een lichaam zijn. Voor een polynoom $\sum_{i=0}^{n} c_i X^i \in K[X]$ met $c_0 c_n \neq 0$ is het bijbehorende *reciproke polynoom* gedefinieerd als $\sum_{i=0}^{n} c_i X^{n-i}$.

Stel dat $a_1, a_2, \ldots, a_n$ elementen van K^* zijn zodanig dat het polynoom

$$(X - a_1)(X - a_2) \cdots (X - a_n)$$

gelijk is aan zijn reciproke polynoom. Bewijs dat er voor elke $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ een $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ bestaat met $a_j = a_i^{-1}$.

Opgave 5. Bepaal of $\mathbf{Z}[i]$ een ideaal I heeft met $\mathbf{Z}[i]/I \cong R$ voor elk van de volgende ringen R:

(a) $R = \mathbf{Z}/10\mathbf{Z}$;

(b) $R = \mathbf{Z}$.