Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 2, 22 februari 2008, 14:00 – 17:00

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Opgave 1. Laat α, β en γ de complexe nulpunten van $f = X^3 + X^2 - 1$ zijn. Bepaal

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma} + \frac{\beta}{\gamma+\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha+\beta}.$$

Opgave 2. Bepaal een voortbrenger van elk van de volgende idealen van $\mathbf{Z}[i]$.
(a) $(3-3i, 3i+1, -6-3i)$
(b) $(19+4i) + (-11-3i)$
(c) $(1001+1001i) \cap (2008+2008i)$

Opgave 3.
(a) Bepaal alle monische, irreducibele polynomen van graad ≤ 3 in $\mathbf{F}_2[X]$.
(b) Ontbind $X^7 + X^4 + X$ in irreducibele factoren in $\mathbf{F}_2[X]$.
(c) Ontbind $X^7 + X^4 + X + 2$ in irreducibele factoren in $\mathbf{Z}[X]$.

Opgave 4. Bepaal de Jordan-normaalvorm, het karakteristieke polynoom en het minimumpolynoom van de matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

over een algebraïsch afgesloten lichaam van karakteristiek 2.

Opgave 5. Beschouw in $\mathbf{C}[X]$ de deelring

$$R = \left\{ \sum a_i X^i \in \mathbf{C}[X] : a_1 = 0 \right\}.$$

Beschouw het R-moduul $M = \mathbf{C}[X]$ met natuurlijke R-vermenigvuldiging. Laat zien
(a) het torsie-deelmoduul van M is 0;
(b) M wordt niet door één element voortgebracht;
(c) M wordt wel door twee elementen voortgebracht;
(d) de R-modulen M en $R \oplus R$ zijn niet isomorf.