Tentamen Algebra 2, donderdag 23 december 2010, 10.00u–13.00u

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan.

Opgave 1. Zij $\mathbf{Z}[[X]]$ de machtreeksenring over $\mathbf{Z}$ en $(\mathbf{Z}/64\mathbf{Z})[X]$ de polynoomring over $\mathbf{Z}/64\mathbf{Z}$.
(a) Is $1-2X$ een eenheid van de ring $\mathbf{Z}[[X]]$? Zo ja, bepaal de inverse.
(b) Is $1-2X$ een eenheid van de ring $(\mathbf{Z}/64\mathbf{Z})[X]$? Zo ja, bepaal de inverse.

Opgave 2. Bepaal van elk van de volgende idealen in welke van de ringen $\mathbf{Z}[X]$, $\mathbf{Q}[X]$ en $\mathbf{F}_2[X]$ het een priemideaal is:

$$(X^3+X^2-X+1), \quad (X^3+X^2-X+1,3), \quad (X^3+X^2-X+1,X+1).$$

Opgave 3. Laten A,B commutatieve ringen zijn en zij $f: A\to B$ een ringhomomorfisme. We schrijven $\mathrm{Spec}(A)$ en $\mathrm{Spec}(B)$ voor de verzamelingen priemidealen van A en B respectievelijk. We beschouwen de afbeelding $f^{\#}: \mathrm{Spec}(B)\to\mathrm{Spec}(A)$ die een priemideaal $P\subset B$ stuurt naar het priemideaal $f^{-1}(P)$ van A. (Zie (15.15) van het dictaat.)
(a) Laat zien dat voor de inclusie

$$f: \mathbf{Z}\to\mathbf{Z}[i]$$

geldt dat $f^{\#}$ surjectief is.
(b) Vind commutatieve ringen R,S en een ringhomomorfisme $f: R\to S$ waarvoor $f^{\#}$ niet surjectief is.

Opgave 4. Laten $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbf{C}$ zodanig zijn dat

$$\alpha+\beta+\gamma=0, \quad \alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0.$$

Bewijs:

$$\alpha^3=\beta^3=\gamma^3.$$

Opgave 5. Laat R een commutatieve ring zijn en $f\in R[X]$ een monisch polynoom met $\deg(f)>0$. We beschouwen het quotiënt $A=R[X]/(f)$ van $R[X]$. Omdat R onder de quotiëntafbeelding $R[X]\to A$ injectief naar A gaat, mogen we R als een deelring van A opvatten.
(a) Zij I een ideaal van R, en geef met $I\cdot A$ het ideaal van A aan dat door I wordt voortgebracht. Bewijs: $I=(I\cdot A)\cap R$.
(b) Laat zien: $R^*=A^*\cap R$.

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.