Hertentamen Algebra 2, Leiden, 24 februari 2006

Geef steeds een volledige uitwerking, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus.

Opgave 1. Ontbind de volgende ring-elementen in irreducibelen:
(a) $X^4 - Y^4$ in de ring $\mathbb{Q}[X, Y]$;
(b) $X^3 + 2X + 1$ in de ring $\mathbb{Z}[X]$;
(c) $i + 7$ in de ring $\mathbb{Z}[i]$;

Opgave 2.
(a) Hoeveel ringhomomorfismen zijn er van $\mathbb{Z}[X]$ naar $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$?
(b) Hoeveel ringhomomorfismen zijn er van $\mathbb{Z}[X]/(3X)$ naar $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$?
(c) Hoeveel ringhomomorfismen zijn er van $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ naar $\mathbb{Z}[X]/(3X)$?

Opgave 3. Definieer de ondergroepen $A, B \subset \mathbb{Z}^3$ door

$$A = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a + b - 5c = 0\};$$
$$B = \{(a, b, c) \in \mathbb{Z}^3 : a + 2b - 5c \equiv 0 \bmod 10\}.$$

Geef een minimaal stel voortbrengers voor A, voor B, en voor

$$A + B = \{x + y\colon\ x \in A, y \in B\}.$$

Opgave 4. Laat $\alpha_1, \ldots, \alpha_8 \in \mathbb{C}$ zodat $X^8 - 4X^2 - 3X + 2 = (X - \alpha_1) \cdots (X - \alpha_8)$.
(a) Bepaal $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_8$.
(b) Bepaal de som

$$\sum_{i=1}^{8} \sum_{j=1}^{8} \alpha_i \alpha_j^2.$$

Opgave 5. Beschouw de afbeelding $h\colon \mathbb{Z}[X] \to (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}) \times (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})$ gedefinieerd door $h(f) = (f(0) \bmod 4, f(2) \bmod 4)$ voor alle $f \in \mathbb{Z}[X]$.
(a) Laat zien dat h een ringhomomorfisme is.
(b) Is h surjectief?
(c) Geef voortbrengers voor de kern I van h.
(d) Is I een priemideaal?

— SUCCES —