Hertentamen Algebra 2, donderdag 27 januari 2011, 10.00u–13.00u

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken, maar gebruik van elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan.

Opgave 1. Ontbind $26 + 18i$ in irreducibele factoren in de ring $\mathbf{Z}[i]$.

Opgave 2. Bedenk een monisch polynoom $f \in \mathbf{Z}[X]$ van graad 3 met de volgende eigenschappen: f is irreducibel in $\mathbf{Z}[X]$ maar reducibel in $\mathbf{R}[X]$, en het polynoom $(f \bmod 2) \in \mathbf{F}_2[X]$ is ook reducibel.

Opgave 3. Laten α, β, $\gamma \in \mathbf{C}$ zodanig zijn dat

$$\alpha + \beta + \gamma = 7, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 5.$$

Bewijs:

$$\alpha^3 - 7\alpha^2 + 5\alpha = \beta^3 - 7\beta^2 + 5\beta = \gamma^3 - 7\gamma^2 + 5\gamma.$$

Opgave 4. Laat A een commutatieve ring zijn, I een deelverzameling van A, en B een deelring van A. Schrijf $J = I \cap B$. Beschouw de volgende beweringen:
(a) als I een ideaal van A is, dan is J een ideaal van B;
(b) als I een ideaal van A is, dan is J een priemideaal van B;
(c) als I een priemideaal van A is, dan is J een priemideaal van B.
Geef voor elk van deze beweringen ofwel een bewijs, ofwel een tegenvoorbeeld.

Opgave 5. Laat R een commutatieve ring zijn en $f \in R[X]$ een monisch polynoom. We schrijven A voor de ring $R[X]/(f)$ en we geven het element $(X \bmod (f))$ van A met α aan. Bewijs dat de ring $A/(\alpha)$ isomorf is met de ring $R/(f(0))$.

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.