Tentamen Algebra 2, Leiden, 22 januari 2014

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag boeken, dictaten en aantekeningen gebruiken, maar geen rekenmachines en andere elektronische hulpmiddelen.

Opgave 1. Ontbind de volgende ring-elementen in irreducibelen:

(a) $X^4 - Y^2$ in de ring $\mathbb{Q}[X, Y]$;
(b) $X^4 - 2X^3 - X^2 + 4$ in de ring $\mathbb{Z}[X]$;
(c) $11 + 2i$ in de ring $\mathbb{Z}[i]$;

Opgave 2. Beantwoord voor elke priem $p \in \{2, 3, 5, 7\}$ de vraag: zijn de ringen $\mathbb{F}_p[X]/(X^3 - 3)$ en $\mathbb{F}_p[T]/(T^3 + 2)$ isomorf?

Opgave 3.

(a) Hoeveel ringhomomorfismen zijn er van $\mathbb{Z}[X]/(X^2 - X)$ naar $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$? Bewijs je antwoord.
(b) Hoeveel ringhomomorfismen zijn er van $\mathbb{Q}$ naar $\mathbb{R}$? En van $\mathbb{R}$ naar $\mathbb{Q}$? Bewijs je antwoord.

Opgave 4. Laat $a, b, c \in \mathbb{C}$ zodat $X^3 + 2X^2 - 3X + 1 = (X - a)(X - b)(X - c)$.

(a) Bepaal $a + b + c$.
(b) Bepaal $a^2 + b^2 + c^2$.
(c) Bepaal $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2$.

Opgave 5. Beschouw het vrije $\mathbb{Z}[i]$-moduul $\mathbb{Z}[i]^2$ van rang 2, en laat

$$A = \{(z, w) \in \mathbb{Z}[i]^2 : z + (1 + i)w \equiv 0 \bmod (2 + 2i)\}.$$

(a) Bewijs dat A een $\mathbb{Z}[i]$-moduul is.
(b) Laat zien dat A vrij is als $\mathbb{Z}[i]$-moduul, en bepaal de rang.
(c) Geef een basis voor A als $\mathbb{Z}[i]$-moduul.

— SUCCES —