Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Hertentamen Algebra 3 - 9 augustus 2012, 10:00 – 13:00

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt. Je mag de syllabus, boeken en aantekeningen gebruiken. Het gebruik van een rekenmachine is niet toegestaan.

Voor een lichaam K noteren we met $\overline{K}$ een algebraïsche afsluiting van K.

Opgave 1. Laat $f = X^4 + 4X^3 + 8X^2 + 8X + 5 \in \mathbf{Q}[X]$.
(a) Laat zien dat f irreducibel is in $\mathbf{Q}[X]$.
(b) Laat α een nulpunt van f zijn in $\overline{\mathbf{Q}}$. Laat $\beta = \alpha^2 + 2\alpha$. Bereken het minimumpolynoom $f^\beta_{\mathbf{Q}}$ en de norm $N_{\mathbf{Q}(\alpha)/\mathbf{Q}}(\beta)$.

Opgave 2.
(a) Welk van de lichamen $\mathbf{Q}$, $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{R}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{F}_{81}$ heeft een Galoisuitbreiding met als Galoisgroep een cyclische groep van orde 4? Motiveer je antwoorden.
(b) Laat $g = X^4 + 4 \in \mathbf{Q}[X]$. Bereken de Galoisgroep $\mathrm{Gal}(g) = \mathrm{Gal}(\Omega^g_{\mathbf{Q}}/\mathbf{Q})$.

Opgave 3.
(a) Laat K een lichaam zijn met $\mathrm{char}(K) \neq 2$. Zijn alle uitbreidingen van graad 2 van K Galois over K?
(b) Laat K een lichaam zijn met $\mathrm{char}(K) \neq 2, 3$ zodanig dat elk element van K het kwadraat van een element van K is. Laat zien dat elke uitbreiding van graad 3 over K Galois is.

Opgave 4. Laat K een lichaam zijn dat het lichaam $\mathbf{F}_q$ bevat waarbij $q = p^n$ met p priem en $n \geq 1$. Laat $a \in K$ en beschouw $h = X^q - X + a$. Laat $\beta \in \overline{K}$ een nulpunt van h zijn. Laat $G = \mathrm{Gal}(h) = \mathrm{Gal}(\Omega^h_K/K)$.
(a) Laat zien dat er een groepshomomorfisme $\varphi : G \to \mathbf{F}_q$ van G naar de additieve groep van $\mathbf{F}_q$ is zodanig dat voor alle $\sigma \in G$ geldt $\varphi(\sigma) = \sigma(\beta) - \beta$.
(b) Neem aan dat h irreducibel is. Laat zien dat φ een isomorfisme is.
(c) Stel dat K een eindig lichaam is en dat n minstens 2 is. Laat zien dat h reducibel is.

Opgave 1:
(a) $f(x \pm 1)$ is Eisenstein bij 2, dus irreducibel.
(b) Het minimumpolynoom is $X^2 + 4X + 5$. De norm van β is $5^2 = 25$ (de norm van β in $\mathbf{Q}(\beta)/\mathbf{Q}$ is 5, de constante term van het gevonden polynoom).

Opgave 2:
(a) Van $\mathbf{R}$ en $\mathbf{C}$ weten we dat het niet kan (zie dictaat). Van $\mathbf{F}_{81} = \mathbf{F}_{3^4}$ kunnen we $\mathbf{F}_{3^{16}}$ nemen. Voor $\mathbf{Q}$ nemen we $\mathbf{Q}(\zeta_5)$. Voor $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ nemen we $\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \zeta_5)$. Dit werkt omdat $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ en $\mathbf{Q}(\zeta_5)$ lineair onafhankelijk zijn (de unieke kwadratische deeluitbreiding van $\mathbf{Q}(\zeta_5)$ is $\mathbf{Q}(\sqrt{\pm 5})$).
(b) Met op dat $x^4 + 4 = (x^2 + 2x + 2)(x^2 - 2x + 2)$. Beide polynomen geven de uitbreiding $\mathbf{Q}(i)/\mathbf{Q}$ (de nulpunten van g zijn $\{1 + i, 1 - i, -1 + i, -1 - i\}$). Dus de Galoisuitbreiding is slechts een C_2.

Opgave 3:
(a) Merk allereerst op dat all uitbreidingen van graad 2 separabel zijn (omdat $\mathrm{char}(K) \neq 2$). Verder geldt dat als de uitbreiding wordt gegeven door een polynoom h, en we hebben een nulpunt, dan hebben we het andere nulpunt ook. Dus de uitbreiding is ook normaal en dus Galois.
(b) Merk op dat alle uitbreidingen van graad 3 separabel zijn, omdat $\mathrm{char}(K) \neq 3$. Neem aan dat de uitbreiding van graad 3 gegeven wordt door een irreducibel polynoom h. De Galoisgroep van dit polynoom is of een C_3 of een S_3. In het eerste geval is de uitbreiding van graad 3 al Galois. In het tweede geval volgt dat de vaste punten van A_3 een uitbreiding van K geven van graad 2. Een tweedegraads uitbreiding in $\mathrm{char}(K) \neq 2$ wordt gegeven door het trekken van een wortel (abc-formule). Dit laatste geval komt dus niet voor.

Opgave 4:
(a) Merk eerst op dat $\sigma(\beta) - \beta \in \mathbf{F}_q$, omdat deze een nulpunt is van $X^q - X$. Daarnaast geldt

$$\varphi(\sigma\tau) = \sigma\tau(\beta) - \beta = \sigma(\beta + \tau(\beta) - \beta) - \beta = \sigma(\beta) + \tau(\beta) - \beta - \beta = \varphi(\sigma) + \varphi(\tau).$$

(b) De nulpunten van h zijn $\beta + c$ waar $c \in \mathbf{F}_q$ (we vinden genoeg nulpunten). Dus $\Omega_K^h = K(\beta)$ en door te kijken naar graden, volgt dat φ is een isomorfisme is.
(c) $\mathbf{F}_{p^n}$ is niet cyclisch als $n \geq 2$, en alle eindige uitbreidingen van eindige lichamen zijn cyclisch.