Tentamen Algebra 3, maandag 7 juni 2010, 14.00–17.00

Dit is een open boek tentamen.
Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden.
Resultaten uit de syllabus (behalve uit de opgaven) mogen worden geciteerd.

Opgave 1. Gegeven zijn complexe getallen α, β, γ die voldoen aan

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma = 2\,, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3\,.$$

(a) Laat zien dat α, β en γ algebraïsche getallen zijn.
Hint: bekijk het polynoom $f = (X - \alpha)(X - \beta)(X - \gamma)$ in $\mathbf{C}[X]$.
(b) Bepaal de graad van het lichaam $\mathbf{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ over $\mathbf{Q}$.

Opgave 2. Schrijf α voor het reële getal $\sqrt{7} - \sqrt{3}$. Laat $K = \mathbf{Q}(\alpha)$.
(a) Bepaal het minimumpolynoom van α over $\mathbf{Q}$.
(b) Bewijs dat K Galois is over $\mathbf{Q}$.
(c) Bepaal de Galoisgroep van K over $\mathbf{Q}$.
(d) Bepaal de deellichamen van K.

Opgave 3. Gegeven is het polynoom $f = X^3 - 2X^2 + X + 1$ in $\mathbf{Q}[X]$.
(a) Bewijs dat f irreducibel is in $\mathbf{Q}[X]$.
(b) Bewijs dat f precies één reëel nulpunt heeft.
(c) Bepaal de Galoisgroep van f over $\mathbf{Q}$.
Laat L een ontbindingslichaam zijn van f over $\mathbf{Q}$.
(d) Bewijs dat L een element α bevat zodat α^2 een negatief rationaal getal is.

Opgave 4. Zij K een lichaam. Beschouw het cyclotomische polynoom Φ_{11} in $K[X]$.
(a) Laat zien dat de irreducibele factoren van Φ_{11} in $K[X]$ alle dezelfde graad hebben.
(b) Bewijs dat de graad van een ontbindingslichaam van $X^{11} - 1$ over K een deler is van 10.
(c) Geef voor elke deler d van 10 een eindig priemlichaam K zodat de graad van een ontbindingslichaam van $X^{11} - 1$ over K gelijk is aan d.

—SUCCES—