Tentamen Algebra 3

8 juni 2009, 14:00–17:00

Dit is een open-boek-tentamen: alle dictaten, aantekeningen en boeken mogen geraadpleegd worden. Er mag geen gebruik worden gemaakt van elektronische hulpmiddelen.

Motiveer al je antwoorden!

Opgave 1. Laat $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ waarbij $\alpha = i + \sqrt{3} \in \mathbf{C}$.

(a) Geef het minimumpolynoom van α over $\mathbf{R}$.

(b) Laat zien dat $\alpha^3 = 8i$, en dat $K = \mathbf{Q}(i, \sqrt{3})$.

(c) Geef het minimumpolynoom van α over $\mathbf{Q}$.

(d) Laat zien dat K Galois is over $\mathbf{Q}$, en bepaal $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$.

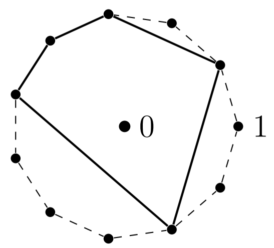
(e) Geef alle deellichamen van K.

Opgave 2. Laat zien dat voor elke $\alpha \in \mathbf{C}$ de lichaamsuitbreiding $\mathbf{Q}(\alpha^3) \subset \mathbf{Q}(\alpha)$ graad 1, 2 of 3 heeft, en laat zien dat alle drie de mogelijkheden voorkomen.

Opgave 3. Laat p een priemgetal zijn en laat $x = y^p - y$ voor een element $y \in \mathbf{F}_{p^2}$. Laat zien dat $x^2 \in \mathbf{F}_p$.

Opgave 4. Voor $S \subset \{z \in \mathbf{C} : z^{11} = 1\}$ definiëren we $z_S = \sum_{s \in S} s$.

(a) Laat zien dat z_S construeerbaar is met passer en liniaal vanuit $\{0, 1\}$ als S bestaat uit de hoekpunten van de volgende 5-hoek in $\mathbf{C}$:



(b) Voor hoeveel van de 2^{11} deelverzamelingen S van $\{z \in \mathbf{C} : z^{11} = 1\}$ is z_S construeerbaar met passer en liniaal vanuit $\{0, 1\}$?

— SUCCES!! —