Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 3, 9 juni 2008, 14:00 – 17:00

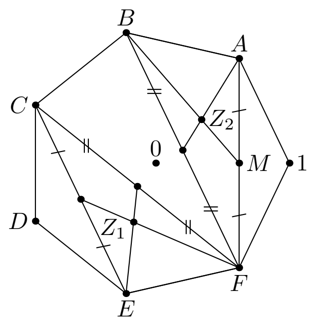
Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt.

Opgave 1. Zij $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{128}$ het lichaam van 128 elementen.
(a) Bewijs: voor alle $x \in \mathbf{F} \setminus \mathbf{F}_2$ geldt $\mathbf{F}^* = \langle x \rangle$.
(b) Voor hoeveel polynomen $f \in \mathbf{F}_2[X]$ geldt $\mathbf{F}_2[X]/(f) \cong \mathbf{F}$?

Opgave 2. Zij $L = \mathbf{Q}(T_1, T_2, T_3, T_4)$ een zuiver transcendente uitbreiding van $\mathbf{Q}$, en vat de permutatiegroep S_4 van $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ op als ondergroep van $\mathrm{Aut}(L)$. Schrijf $K = L^{S_4}$. Bepaal $[L : K(\alpha)]$ voor de volgende waarden van α:
(a) $\alpha = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$;
(b) $\alpha = T_1 + T_2 + T_3$;
(c) $\alpha = T_1 + T_2$;
(d) $\alpha = T_1$.

Opgave 3. Definieer $f = (X^2 - 2)(X^3 - 5) \in \mathbf{Z}[X]$. Vat, voor K een lichaam, f op als element van $K[X]$ via de natuurlijke afbeelding $\mathbf{Z}[X] \to K[X]$. Bepaal $\mathrm{Gal}(f)$ als
(a) $K = \mathbf{Q}$;
(b) $K = \mathbf{R}$;
(c) $K = \mathbf{F}_7$;
(d) $K = \mathbf{F}_{11}$.

Opgave 4. Definieer $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5})$.
(a) Bewijs: $[K : \mathbf{Q}] = 8$.
(b) Bepaal $\alpha \in K$ met $K = \mathbf{Q}(\alpha)$.
(c) Bepaal het minimumpolynoom van α over $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.



Opgave 5. Beschouw de regelmatige 7-hoek in $\mathbf{C}$ met middelpunt 0 en hoekpunt 1, en noem de overige hoekpunten A, B, C, D, E en F zoals aangegeven. Zij Z_1 het zwaartepunt van driehoek CEF en Z_2 het zwaartepunt van driehoek ABF. Zij verder M het middelpunt van het lijnstuk AF.

(a) Zijn Z_1 en Z_2 construeerbaar met passer en liniaal uitgaande van $\{0, 1\}$?
(b) Is M construeerbaar met passer en liniaal uitgaande van $\{0, 1\}$?
(c) Is A construeerbaar met passer en liniaal uitgaande van $\{0, 1, Z_2\}$?