Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 3, 1 juni 2004, 14.00–17.00 uur

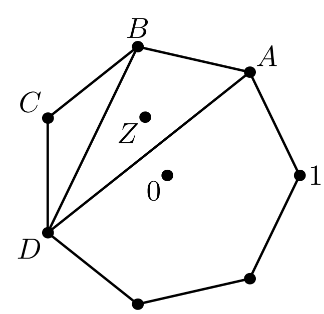
Dit is een open-boek-tentamen.
Motiveer al je antwoorden, eventueel met verwijzingen naar stellingen uit de syllabus.

Opgave 1. Bepaal de volgende lichaamsgraden:
(a) $[\mathbf{Q}(\sqrt{-2}, \sqrt{3}) : \mathbf{Q}]$;
(b) $[\mathbf{R}(\sqrt{-2}, \sqrt{3}) : \mathbf{R}]$;
(c) $[\mathbf{F}_7(\sqrt{-2}, \sqrt{3}) : \mathbf{F}_7]$;
(d) $[\mathbf{F}_{11}(\sqrt{-2}, \sqrt{3}) : \mathbf{F}_{11}]$.

Opgave 2. Definieer polynomen f_1, f_2, $f_3 \in \mathbf{F}_2[X]$ door $f_1 = X^2 + 1$, $f_2 = X^2 + X$ en $f_3 = X^2 + X + 1$. Beantwoord voor $i = 1, 2, 3$ de volgende vragen:
(a) Is f_i een separabel polynoom?
(b) Is $\mathbf{F}_2[X]/(f_i)$ een separabele lichaamsuitbreiding van $\mathbf{F}_2$?

Opgave 3.
(a) Bewijs dat de ring $K = \mathbf{Q}[X]/(X^6 + 3)$ een lichaam is. Dit lichaam noteren we ook wel als $K = \mathbf{Q}(\sqrt[6]{-3})$.
(b) Is K een Galoisuitbreiding van $\mathbf{Q}$? Zo ja, bepaal de Galois groep. Zo nee, bepaal de normale afsluiting.
(c) Is de ring $K = \mathbf{Q}[X]/(X^6 - 72)$ een lichaam? Zo ja, is dit lichaam normaal over $\mathbf{Q}$? Zo nee, geef een maximaal ideaal van deze ring.

Opgave 4. Beschouw de regelmatige 7-hoek in $\mathbf{C}$ met middelpunt 0 en hoekpunt 1, en nummer hoekpunten A, B, C, D als aangegeven. Ga na welke punten construeerbaar zijn met passer en liniaal vanuit de verzameling $\{0, 1\}$:
(a) het punt A;
(b) het midden van C en D;
(c) het zwaartepunt Z van de driehoek ABD.



— SUCCES —