Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 3, maandag 11 juni 2007, 10.00 tot 13.00 uur.

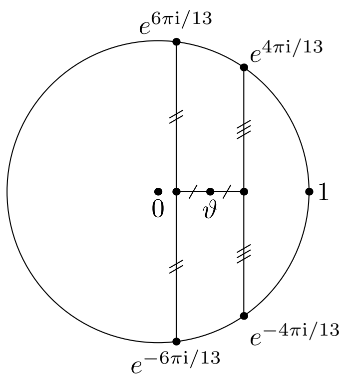
Dit is een open boek tentamen: dictaat, eigen aantekeningen en (nagekeken) huiswerk mogen gebruikt worden.
Er mag geen gebruik worden gemaakt van electronische hulpmiddelen.
Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden en verwijs naar de stellingen die je gebruikt. Er mag niet worden verwezen naar resultaten uit huiswerk/opgaven.

Opgave 1.
Laat $\alpha \in \mathbf{R}$ het unieke reële nulpunt van $X^3 - 2$ zijn. Bepaal alle mogelijke waarden van $[K(\alpha) : K]$, waar K een deellichaam van $\mathbf{C}$ is. Geef bij elke waarde een voorbeeld van een K waarvoor deze wordt aangenomen.

Opgave 2.
(a) Laat zien dat $f = X^4 + 9$ irreducibel is over $\mathbf{Q}$.
(b) Laat $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ met α een nulpunt van f in $\overline{\mathbf{Q}}$. Bepaal het minimumpolynoom van $\alpha^3 - 3\alpha + 1$ over $\mathbf{Q}$.
(c) Laat zien dat K Galois over $\mathbf{Q}$ is en bepaal $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$.
(d) Geef alle deellichamen van K.

Opgave 3.
Schrijf Φ_n voor het n-de cyclotomische polynoom.
(a) Toon aan dat Φ_3 en Φ_5 splitsen in lineaire factoren in $\mathbf{F}_{16}$.
(b) Laat p een priemgetal zijn en k een lichaam van karakteristiek ongelijk aan p. Stel $\zeta \in k$ is een nulpunt van Φ_p. Toon aan dat ζ orde p heeft in $k^\times$.
(c) Laat zien dat ieder lichaam waarover Φ_3 en Φ_5 splitsen in lineaire factoren tenminste 16 elementen heeft.

Opgave 4.
Laat ϑ in $\mathbf{C}$ gedefinieerd zijn als in de figuur.



(a) Toon aan dat $[\mathbf{Q}(\vartheta) : \mathbf{Q}] = 3$.
(b) Is het mogelijk om gegeven de punten 0, 1 en ϑ een regelmatige 13-hoek te construeren met passer en liniaal?

— Succes —