Tentamen Algebra 3, maandag 12 juni 2006, 10.00–13.00

Dit is een open boek tentamen.
Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden.

Opgave 1. Zij $K \subset L$ een lichaamsuitbreiding en laat α, β in L transcendent zijn over K.
(i) Geef voorbeelden waaruit blijkt dat $\alpha + \beta$ en $\alpha \cdot \beta$ algebraïsch kunnen zijn over K.
(ii) Is het mogelijk dat $\alpha + \beta$ en $\alpha \cdot \beta$ beide *tegelijk* algebraïsch zijn over K?

Opgave 2. Laat $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{7})$.
(i) Geef een element α in K zodat $K = \mathbb{Q}(\alpha)$.
(ii) Bepaal het minimumpolynoom van α over $\mathbb{Q}$.
(iii) Bepaal de deellichamen van K.

Opgave 3. Laat K het lichaam $\mathbb{Q}(\sqrt{-3}, \sqrt[3]{5})$ zijn.
(i) Bereken de graad $[K : \mathbb{Q}]$.
(ii) Geef een polynoom f in $\mathbb{Q}[X]$ zodat K het ontbindingslichaam is van f over $\mathbb{Q}$.
(iii) Bepaal de lichaamsautomorfismen van K.
(iv) Bepaal de graad over $\mathbb{Q}$ van de elementen

$$\sqrt{-3} \cdot \sqrt[3]{5} \qquad \text{en} \qquad (\sqrt{-3} + 1) \cdot \sqrt[3]{5}$$

van K.

Opgave 4. Laat $K = \mathbb{Q}(\zeta_{15})$ met ζ_{15} een primitieve 15-e machtseenheidswortel in $\mathbb{C}$.
(i) Bewijs dat K een Galoisuitbreiding is van $\mathbb{Q}$.
(ii) Bewijs dat K een primitieve 5-e machtseenheidswortel ζ_5 bevat.
(iii) Bepaal $[K : \mathbb{Q}(\zeta_5)]$ en $\mathrm{Gal}(K/\mathbb{Q}(\zeta_5))$.
Laat $\alpha = \zeta_{15}^2 + \zeta_{15}^7$.
(iv) Bewijs dat $\alpha \in \mathbb{Q}(\zeta_5)$.
(v) Bepaal de graad van α over $\mathbb{Q}$.

Opgave 5. Laat Φ_n het n-e cyclotomische polynoom zijn.
(i) Ontbind Φ_5 en Φ_{12} in irreducibele factoren in $\mathbb{F}_2[X]$.
(ii) Bepaal voor beide polynomen de graad over $\mathbb{F}_2$ van het ontbindingslichaam.
(iii) Laat p een priemgetal zijn dat n niet deelt, en zij K een lichaam van karakteristiek p. Bewijs: ieder nulpunt van Φ_n in K is een primitieve n-e machtseenheidswortel.

—SUCCES—