Tentamen Algebra 3

13 juni 2013, 10:00–13:00

Je mag bij dit tentamen geen elektronische hulpmiddelen gebruiken. Wel toegestaan zijn boeken, syllabi en aantekeningen. Motiveer al je antwoorden. Veel succes!

Opgave 1. Zij $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{7} \in \mathbf{R}$. Laat K het lichaam $\mathbf{Q}(\alpha)$ zijn.

(a) Bepaal het minimumpolynoom van α over $\mathbf{Q}$.
(b) Laat zien dat K eindig Galois is over $\mathbf{Q}$.
(c) Bepaal $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ en geef alle tussenlichamen van de uitbreiding $\mathbf{Q} \subset K$.

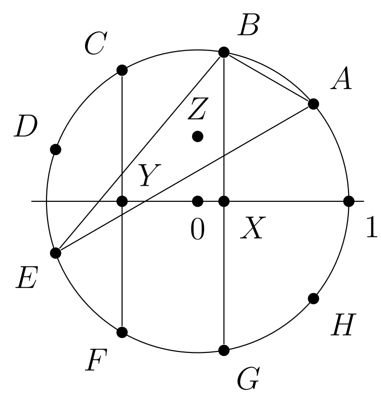
Opgave 2. Bepaal de graden van de ontbindingslichamen van de polynomen $X^2 - 3$, $X^2 - 5$ en $(X^2 - 3)(X^2 - 5)$ over het lichaam $\mathbf{F}_p$

(a) voor p gelijk aan het priemgetal 7.
(b) voor p gelijk aan het priemgetal 12323.

Opgave 3. Laat $\overline{\mathbf{Q}}$ de algebraïsche afsluiting van $\mathbf{Q}$ in $\mathbf{C}$ zijn, en $K = \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ het reële deellichaam van $\overline{\mathbf{Q}}$.

(a) Bewijs: het compositum van $\mathbf{R}$ en $\overline{\mathbf{Q}}$ is $\mathbf{C}$.
(b) Bewijs: $[\overline{\mathbf{Q}} : K] = 2$.

Opgave 4. Beschouw de regelmatige negenhoek in $\mathbf{C}$ met middelpunt 0 en hoekpunt 1, en nummer de hoekpunten $A, B, \ldots, H$ als aangegeven. Geef van de volgende punten aan of ze construeerbaar zijn met passer en liniaal vanuit de verzameling $\{0, 1\}$. Ondersteun je antwoorden met een bewijs.



(a) Het punt A.
(b) Het midden X van B en G.
(c) Het midden Y van C en F.
(d) Het zwaartepunt Z van de driehoek ABE.

Antwoorden tentamen Algebra 3, 13 juni 2013

Opgave 1.

(a) Er geldt $\alpha^2 = 9 + 2\sqrt{14}$ (berekening), dus $(\alpha^2 - 9)^2 = 56$. Uitwerken geeft

$$\alpha^4 - 18\alpha^2 + 25 = 0.$$

Dus α is een nulpunt van $f = X^4 - 18X^2 + 25$. Rest aan te tonen dat f het minimumpolynoom is.

Eerste variant. De substitutie $\alpha = 2/\beta + 1$ geeft dat β voldoet aan het polynoom

$$g = X^4 - 8X^3 - 6X^2 + 4X + 2,$$

en g is Eisenstein bij 2. Verder geldt $\mathbf{Q}(\alpha) = \mathbf{Q}(\beta)$, dus de graden van α en β over $\mathbf{Q}$ zijn beide gelijk aan 4. Dus f is het minimumpolynoom van α.

Tweede variant. Er geldt duidelijk dat $K \subset \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$. We laten omgekeerd zien dat $\sqrt{2}$ en $\sqrt{7}$ in K zitten. Er geldt $\alpha^3 = 23\sqrt{2} + 13\sqrt{7}$ (berekening), dus vinden we

$$\sqrt{2} = (\alpha^3 - 13\alpha)/10, \quad \sqrt{7} = -(\alpha^3 - 23\alpha)/10.$$

Dus $\sqrt{2}, \sqrt{7} \in K$. Omdat $\sqrt{7} \notin \mathbf{Q}(\sqrt{2})$ (gebruik hiervoor bijv. opgave 24.17) moet gelden dat $[\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7}) : \mathbf{Q}] = 4$, en dus geldt $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$. Dus $[K : \mathbf{Q}] = 4$, en f is het minimumpolynoom van α.

(b) Beide oplossingen gebruiken de tweede variant van de oplossing van (a).

Eerste variant. We zien door invullen dat de nulpunten van f precies de elementen

$$\pm\sqrt{2} \pm \sqrt{7}$$

zijn. Maar we zagen al dat $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$. Dus K is het ontbindingslichaam van f, dus Galois.

Tweede variant. Bij de tweede variant van de oplossing van (a) zagen we dat $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$. Dus K is het compositum van $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ en $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$, die beide Galois zijn over $\mathbf{Q}$. Dus is K het zelf ook.

(c) We hebben $\#\,\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q}) = 4$. Verder wordt elk automorfisme van K vastgelegd door de beelden van $\sqrt{2}$ en $\sqrt{7}$, omdat $K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{7})$. Het element $\sqrt{2}$ (resp. $\sqrt{7}$) wordt door elk automorfisme afgebeeld op $\pm\sqrt{2}$ (resp. $\pm\sqrt{7}$). Door mogelijkheden te tellen zien we dus dat alle combinaties voorkomen. Dus $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ wordt voortgebracht door de automorfismen

$$\sigma_2 : \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2},\ \sqrt{7} \mapsto \sqrt{7}$$

en

$$\sigma_7 : \sqrt{2} \mapsto \sqrt{2},\ \sqrt{7} \mapsto -\sqrt{7}.$$

Deze brengen een viergroep van Klein voort. Dus heeft $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ drie niet-triviale ondergroepen. De corresponderende deellichamen zijn $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$, $\mathbf{Q}(\sqrt{7})$ en $\mathbf{Q}(\sqrt{14})$.

Opgave 2. Noteer $f = X^2 - 3$ en $g = X^3 - 5$.

(a) Stel $p = 7$. Dan zijn 3 en 5 geen kwadraten in $\mathbf{F}_p$, dus f en g zijn irreducibel van graad 2, en $\Omega^f_{\mathbf{F}_p}$ en $\Omega^g_{\mathbf{F}_p}$ hebben beide graad 2 over $\mathbf{F}_p$. Dit geeft tevens dat $\Omega^f_{\mathbf{F}_p}$ en $\Omega^g_{\mathbf{F}_p}$ beide bevat zijn in de unieke kwadratische uitbreiding van $\mathbf{F}_p$ (bekeken in een vast gekozen algebraïsche afsluiting $\overline{\mathbf{F}}_p$ van $\mathbf{F}_p$), dus $\Omega^{fg}_{\mathbf{F}_p}$, het compositum van $\Omega^f_{\mathbf{F}_p}$ en $\Omega^g_{\mathbf{F}_p}$, heeft tevens graad 2 over $\mathbf{F}_p$.

(b) Stel $p = 12323$. Dan is 3 een kwadraat in $\mathbf{F}_p$ en 5 niet (volgt uit kwadratische reciprociteit). Dus het ontbindingslichaam $\Omega^f_{\mathbf{F}_p}$ heeft graad 1 over $\mathbf{F}_p$, terwijl $\Omega^g_{\mathbf{F}_p}$ en $\Omega^{fg}_{\mathbf{F}_p}$ beide graad 2 hebben.

Opgave 3.

(a) Het compositum van $\overline{\mathbf{Q}}$ en $\mathbf{R}$ is strikt groter dan $\mathbf{R}$, want het element $\sqrt{-1} \in \overline{\mathbf{Q}}$ zit bijvoorbeeld niet in $\mathbf{R}$. Omdat $[\mathbf{C} : \mathbf{R}] = 2$ heeft de uitbreiding $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$ geen niet-triviale tussenuitbreidingen, dus moet gelden dat het compositum van $\overline{\mathbf{Q}}$ en $\mathbf{R}$ gelijk is aan $\mathbf{C}$.

(b) Laat $\sigma \in \mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{Q}})$ de beperking van de complexe conjugatie zijn tot $\overline{\mathbf{Q}}$. Het deellichaam $\overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$ van $\overline{\mathbf{Q}}$ is het invariantenlichaam onder de ondergroep $H = \langle \sigma \rangle \subset \mathrm{Aut}(\overline{\mathbf{Q}})$ van orde 2. Uit Definitie 24.1 volgt nu dat $\overline{\mathbf{Q}}$ eindig Galois is over $\overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}$. Uit de hoofdstelling volgt nu dat $[\overline{\mathbf{Q}} : \overline{\mathbf{Q}} \cap \mathbf{R}] = \#H = 2$.

Opgave 4. Laat $\zeta = \exp(2\pi/9)$ het punt A zijn. De uitbreiding $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\zeta)$ is Galois. De Galoisgroep $G = \mathrm{Gal}(\mathbf{Q}(\zeta)/\mathbf{Q})$ is isomorf met $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^*$ (Stelling 24.15). We hebben $(\mathbf{Z}/9\mathbf{Z})^* = \langle \overline{2} \rangle$, dus G wordt voortgebracht door het automorfisme $\sigma_2 : \zeta \mapsto \zeta^2$.

We gebruiken: $\alpha \in \overline{\mathbf{Q}}$ is construeerbaar met passer en liniaal vanuit $\{0, 1\}$ dan en slechts dan als de Galoisgroep van $f^\alpha_{\mathbf{Q}}$ een eindige 2-groep is (Stellingen 25.9–25.10). Met de Galoiscorrespondentie zien we dat de uitbreiding $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\zeta)$ naast de triviale tussenuitbreidingen het kwadratische lichaam $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ bevat, behorend bij de ondergroep $\langle \overline{4} \rangle = \{\overline{1}, \overline{4}, \overline{7}\}$, en een lichaam K_3 dat van graad 3 is over $\mathbf{Q}$, behorend bij de ondergroep $\langle \overline{-1} \rangle$. Elementen in $\mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ hebben graad 2 over $\mathbf{Q}$ en zijn zeker construeerbaar, terwijl elementen die in het complement $\mathbf{Q}(\zeta) \setminus \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$ liggen graad 3 of 6 hebben over $\mathbf{Q}$, en dus zeker niet construeerbaar zijn.

Het volgt dat $\alpha \in \mathbf{Q}(\zeta)$ construeerbaar is dan en slechts dan als $\alpha \in \mathbf{Q}(\sqrt{-3})$, wat het geval is dan en slechts dan als α invariant is onder het automorfisme $\sigma_4 : \zeta \mapsto \zeta^4$ (of onder $\sigma_7 : \zeta \mapsto \zeta^7$). Dit verifiëren we voor de gevallen (a)–(d).

(a) Voor $\alpha = \zeta$ hebben we $\sigma_4(\alpha) = \zeta^4 \neq \zeta = \alpha$. Dus niet construeerbaar.

(b) Laat $\alpha = (\zeta^2 + \zeta^7)/2$ het midden van B en G zijn. We hebben dat $\sigma_4(\alpha) = (\zeta^8 + \zeta^{28})/2 = (\zeta^8 + \zeta)/2$ het midden van A en H is. Dus niet construeerbaar.

(c) Laat $\alpha = (\zeta^3 + \zeta^6)/2$ het midden van B en G zijn. We hebben $\sigma_4(\alpha) = (\zeta^{12} + \zeta^{24})/2 = (\zeta^3 + \zeta^6)/2$. Dus construeerbaar.

(d) Laat $\alpha = (\zeta + \zeta^2 + \zeta^5)/3$ het zwaartepunt van $\triangle ABE$ zijn. We hebben dat $\sigma_4(\alpha) = (\zeta^4 + \zeta^8 + \zeta^2)/3$ het zwaartepunt van $\triangle BDH$ is. Dus niet construeerbaar.