Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

**Tentamen Algebra 3, 18 augustus 2008, 14:00 – 17:00**

Motiveer steeds je antwoord, en noem de stellingen die je gebruikt.

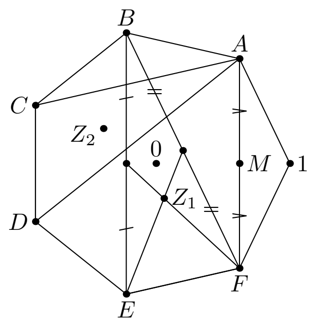
**Opgave 1.** Zij $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{125}$ het lichaam van 125 elementen.
(a) Voor hoeveel $x \in \mathbf{F}$ geldt $\mathbf{F}^* = \langle x \rangle$?
(b) Voor hoeveel polynomen $f \in \mathbf{F}_5[X]$ geldt $\mathbf{F}_5[X]/(f) \cong \mathbf{F}$?

**Opgave 2.** Zij $L = \mathbf{Q}(T_1, T_2, T_3, T_4)$ een zuiver transcendente uitbreiding van $\mathbf{Q}$, en vat de permutatiegroep $S_4$ van $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ op als ondergroep van $\mathrm{Aut}(L)$. Schrijf $K = L^{S_4}$. Bepaal $[L : K(\alpha)]$ voor de volgende waarden van $\alpha$:
(a) $\alpha = T_1T_2$;
(b) $\alpha = T_1T_2 + T_3T_4$;
(c) $\alpha = T_1T_2 + T_2T_3$;
(d) $\alpha = T_1T_2^2 + T_2T_3^2 + T_3T_4^2 + T_4T_1^2$.

**Opgave 3.** Definieer $f = (X^2 + X + 2)(X^3 - 2) \in \mathbf{Z}[X]$. Vat, voor $K$ een lichaam, $f$ op als element van $K[X]$ via de natuurlijke afbeelding $\mathbf{Z}[X] \to K[X]$, en zij $\Omega_K^f$ een ontbindingslichaam van $f$ over $K$. Bepaal $\mathrm{Gal}(\Omega_K^f/K)$ als
(a) $K = \mathbf{Q}$;
(b) $K = \mathbf{R}$;
(c) $K = \mathbf{F}_7$;
(d) $K = \mathbf{F}_{11}$.

**Opgave 4.** Definieer $K = \mathbf{Q}(\sqrt{-1}, \sqrt{2}, \sqrt{3})$.
(a) Bewijs: $[K : \mathbf{Q}] = 8$.
(b) Bepaal $\alpha \in K$ met $K = \mathbf{Q}(\alpha)$.
(c) Bepaal het minimumpolynoom van $\alpha$ over $\mathbf{Q}(\sqrt{2})$.

**Opgave 5.** Beschouw de regelmatige 7-hoek in $\mathbf{C}$ met middelpunt 0 en hoekpunt 1, en noem de overige hoekpunten $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ zoals aangegeven. Zij $Z_1$ het zwaartepunt van driehoek $BEF$ en $Z_2$ het zwaartepunt van driehoek $ACD$. Zij verder $M$ het middelpunt van het lijnstuk $AF$.




(a) Zijn $Z_1$ en $Z_2$ construeerbaar met passer en liniaal uitgaande van $\{0, 1\}$?
(b) Is $B$ construeerbaar met passer en liniaal uitgaande van $\{0, 1, M\}$?
(c) Is het midden van $Z_1Z_2$ construeerbaar met passer en liniaal uitgaande van $\{0, 1\}$?