

**Tentamen Algebra 3, maandag 20 augustus 2007, 14.00 tot 17.00 uur.**

Dit is een open boek tentamen: dictaat, eigen aantekeningen en (nagekeken) huiswerk mogen gebruikt worden.

Er mag geen gebruik worden gemaakt van elektronische hulpmiddelen.

Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.

Motiveer je antwoorden en verwijst naar de stellingen die je gebruikt. Er mag niet worden verwezen naar resultaten uit huiswerk/opgaven.

**Opgave 1.**

Laat  $\alpha$  een complex getal ongelijk aan 0 zijn. Toon aan dat  $[\mathbf{Q}(\alpha) : \mathbf{Q}(\alpha + \alpha^{-1})]$  gelijk is aan 1 of 2 en dat beide mogelijkheden voorkomen.

**Opgave 2.**

Laat  $f = X^2 - 4X + 7$  en  $g = X^3 - 3$  in  $\mathbf{Q}[X]$ .

(a) Laat zien dat  $f$  en  $g$  irreducibel zijn in  $\mathbf{Q}[X]$ .

(b) Laat  $\alpha$  een nulpunt van  $f$  in  $\overline{\mathbf{Q}}$  zijn. Toon aan dat  $\mathbf{Q}(\alpha)$  een primitieve derde eenheidswortel bevat.

(c) Laat  $\beta$  een nulpunt van  $g$  in  $\overline{\mathbf{Q}}$  zijn en zij  $\gamma = \frac{1}{3}(\alpha - 2)\beta^2$ . Bepaal het minimumpolynoom van  $\gamma$  over  $\mathbf{Q}$ .

(d) Toon aan dat  $\mathbf{Q}(\alpha, \beta)$  Galois is over  $\mathbf{Q}$  en bepaal de Galoisgroep.

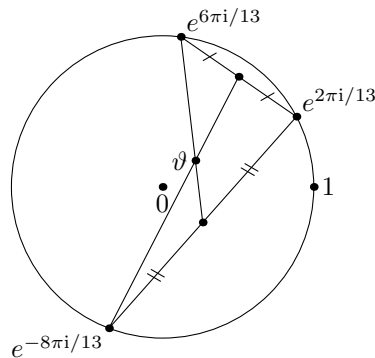
**Opgave 3.**

(a) Ontbind  $X^8 - 1$  in irreducibele factoren in  $\mathbf{F}_3[X]$ .

(b) Zij  $p$  een priemgetal. Laat zien dat iedere irreducibele factor van  $X^8 - 1$  in  $\mathbf{F}_p[X]$  graad 1 of 2 heeft.

**Opgave 4.**

Laat  $\vartheta$  in  $\mathbf{C}$  gedefinieerd zijn als in de figuur.



(a) Toon aan dat  $[\mathbf{Q}(\vartheta) : \mathbf{Q}] = 4$ .

(b) Is het mogelijk om gegeven de punten 0 en 1 het punt  $\vartheta$  te construeren met passer en liniaal?