

Tentamen Algebra 3

woensdag 21 mei 2003, 14–17 uur

- Alleen het gebruik van niet-programmeerbare rekenmachines is toegestaan.
- Geef niet alleen de antwoorden maar laat ook zien hoe je er aan komt.
- Vul op elk tentamenpapier **duidelijk leesbaar** je naam en collegekaartnummer in.
- Je mag bij het tentamen je dictaat en aantekeningen gebruiken.

1. Zij $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt[3]{5})$.
 - a) Laat zien dat $[K : \mathbb{Q}] = 6$ en bepaal alle \mathbb{Q} -isomorfismen van K met beeld in \mathbb{C} . (Om een \mathbb{Q} -isomorfisme σ van K te beschrijven is het voldoende om $\sigma(\sqrt{3})$, $\sigma(\sqrt[3]{5})$ te geven.)
 - b) Zij $\alpha = \sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{5}$. Bewijs dat $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ en bepaal $f_{\mathbb{Q}}^{\alpha}$.
 - c) Zij $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$. Bewijs dat $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3} + a\sqrt[3]{5})$.
- 2.a) Laat zien dat $X^2 + X + 2$ en $X^2 - 2$ irreducibel zijn in $\mathbb{F}_5[X]$.
 - b) Zij $K_1 = \mathbb{F}_5(\alpha)$ met $\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$ en $K_2 = \mathbb{F}_5(\beta)$ met $\beta^2 - 2 = 0$. Geef een expliciet isomorfisme $\phi : K_1 \rightarrow K_2$ (het is nodig en voldoende $\phi(\alpha)$ expliciet aan te geven).
3. Ga voor de volgende lichaamsuitbreidingen $K \subset L$ na of ze normaal zijn en of ze separabel zijn. Motiveer je antwoord.
 - a) $K = \mathbb{F}_p(t)$, $L = K(\alpha)$ met $\alpha^p = t + 1$, waarbij p een priemgetal is, en waarbij t transcendent is over \mathbb{F}_p .
 - b) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{2})$.
 - c) $K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt[6]{-3})$.
4. Zij $K = \mathbb{Q}(\sqrt{3}, \sqrt{5}, \sqrt{-7})$.
 - a) Bewijs dat $[K : \mathbb{Q}] = 8$.
 - b) Laat zien dat $\mathbb{Q} \subset K$ een Galoisuitbreiding is en geef alle elementen van de Galoisgroep $\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$. (Aanwijzing: het is voldoende om voor elke $\sigma \in \text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ de waarden $\sigma(\sqrt{3})$, $\sigma(\sqrt{5})$, $\sigma(\sqrt{-7})$ te geven.)
 - c) Bepaal het aantal deellichamen M van K met $[M : \mathbb{Q}] = 4$.

Zie voor de puntenwaardering van de opgaven de achterkant.

Puntenwaardering (onder voorbehoud):

1. a) 4, b) 3, c) 3; totaal 10.
2. a) 4, b) 6; totaal 10.
3. a) 4, b) 3, c) 3; totaal 10.
4. a) 3, b) 3, d) 4; totaal 10.

Maximaal te behalen aantal punten: 40.

Cijfer: (totaal aantal behaalde punten)/4.

Het nagekeken tentamen kan van 26 mei tot en met 30 mei worden afgehaald op kamer 228. Daarna kan het tentamen worden afgehaald van de kast tegenover het onderwijssecretariaat (kamer 203).