Mathematisch Instituut
Universiteit Leiden

Tentamen Algebra 3, woensdag 22 mei 2002, 14.00–17.00 uur

1. Geef een element $\alpha \in K = \mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{5})$ aan met $K = \mathbf{Q}(\alpha)$ en bepaal het minimumpolynoom $f_{\mathbf{Q}}^{\alpha}$.

2. Laat zien dat $K_1 = \mathbf{F}_3[X]/(X^3 - X - 1)$ en $K_2 = \mathbf{F}_3[Y]/(Y^3 - Y - 2)$ isomorfe lichamen zijn, en geef een expliciet isomorfisme $\phi : K_1 \xrightarrow{\sim} K_2$ aan.

3. Zijn de hoeken van een gelijkzijdige driehoek met passer en liniaal in drie gelijke delen te verdelen? (Motiveer je antwoord en formuleer de gebruikte stellingen.)

4. Zij $L = \Omega_{\mathbf{Q}}^{X^4-3}$ het ontbindingslichaam van $X^4 - 3$ over $\mathbf{Q}$.

a. Laat zien dat $\mathrm{Gal}(L/\mathbf{Q})$ een niet-abelse groep is.

b. Laat zien dat er een deellichaam $K \subset L$ bestaat zodat $\mathrm{Gal}(K/\mathbf{Q})$ abels van orde 4 is.

c. Is het lichaam K in onderdeel b uniek bepaald?

5. Definieer K_2 en K_4 als de unieke deellichamen van $\mathbf{Q}(\zeta_{13})$ van graad 2 respectievelijk 4 over $\mathbf{Q}$. Deze lichamen zijn als volgt geordend: $\mathbf{Q} \subset K_2 \subset K_4 \subset \mathbf{Q}(\zeta_{13})$.

a. Bewijs: $K_2 = \mathbf{Q}(\sqrt{13})$.

b. Bepaal een element $\alpha \in K_2$ met $K_4 = K_2(\sqrt{\alpha})$.

c. Bestaat er een element $\beta \in \mathbf{Q}$ met $K_4 = \mathbf{Q}(\sqrt[4]{\beta})$? Motiveer je antwoord.

Uitslagen vanavond op collegekaartnummer op de webpagina van het college.