

Tentamen Algebra 3

6 juni 2011, 14:00–17:00

Alle dictaten, aantekeningen en boeken mogen geraadpleegd worden.
Gebruik van elektronische hulpmiddelen is niet toegestaan.
Voorzie je antwoorden van een **motivatie!**

1. Vind een primitief element α voor de uitbreiding $\mathbf{Q} \subset \mathbf{Q}(\sqrt{2011}, \sqrt{-2011})$, en bepaal het minimumpolynoom $f_{\mathbf{Q}}^{\alpha}$.

2. Bepaal de Galoisgroep $\text{Gal}(\Omega_{\mathbf{Q}}^f/\mathbf{Q})$ voor elk van de volgende polynomen:

(a) $f = X^4 + 1$;

(b) $f = X^4 + 3$;

(c) $f = X^4 + 4$.

3. Voor een lichaam K definiëren we d_K als de graad over K van het ontbindingslichaam van $X^9 - 1 \in K[X]$. Bepaal d_K voor K gelijk aan elk van de vijf lichamen \mathbf{R} , \mathbf{Q} , \mathbf{F}_2 , \mathbf{F}_3 en \mathbf{F}_7 .

4. Zij $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{128}$ het lichaam van 128 elementen.

(a) Bewijs: voor alle $x \in \mathbf{F} \setminus \mathbf{F}_2$ geldt $\mathbf{F}^* = \langle x \rangle$.

(b) Voor hoeveel polynomen $f \in \mathbf{F}_2[X]$ geldt $\mathbf{F}_2[X]/(f) \cong \mathbf{F}$?

5. Een *dertienhoeksdriehoek* in het complexe vlak is een driehoek waarvan de drie hoekpunten (paarsgewijs verschillende) dertiende eenheidswortels in \mathbf{C} zijn. Met *construeerbaar* bedoelen we hieronder “construeerbaar met passer en liniaal vanuit $\{0, 1\}$ ”.

(a) Bestaan er dertienhoeksdriehoeken die construeerbaar zijn?

(b) Bestaan er dertienhoeksdriehoeken waarvan het zwaartepunt construeerbaar is? En dertienhoeksdriehoeken waarvan het zwaartepunt *niet* construeerbaar is?

(c) Wat is de kans dat een willekeurig gekozen dertienhoeksdriehoek een construeerbaar zwaartepunt heeft?

** Uitslagen vanavond op de webpagina van het college. **