Hertentamen Algebra 3, maandag 9 augustus 2010, 14.00–17.00

Dit is een open boek tentamen.
Vermeld op alle bladen die je inlevert je naam en studentnummer.
Motiveer je antwoorden.
Resultaten uit de syllabus (behalve uit de opgaven) mogen worden geciteerd.

Opgave 1. Gegeven zijn complexe getallen α, β, γ die voldoen aan

$$\alpha + \beta + \gamma = \alpha\beta\gamma = 1\,, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 3\,.$$

(a) Geef een polynoom f in $\mathbf{Q}[X]$ zodat α, β en γ de nulpunten zijn van f.
(b) Bepaal de graad van het lichaam $\mathbf{Q}(\alpha, \beta, \gamma)$ over $\mathbf{Q}$.

Opgave 2. Schrijf α voor het reële getal $\sqrt{5} - \sqrt{3}$. Laat $K = \mathbf{Q}(\alpha)$.
(a) Laat zien dat K de elementen $\sqrt{3}$ en $\sqrt{5}$ bevat. Hint: $\alpha\sqrt{15} = -3\sqrt{5} + 5\sqrt{3}$.
(b) Geef een polynoom f in $\mathbf{Q}[X]$ zodat K een ontbindingslichaam is van f over $\mathbf{Q}$.
(c) Bewijs dat K Galois is over $\mathbf{Q}$.
(d) Bepaal de Galoisgroep van K over $\mathbf{Q}$.

Opgave 3. Beschouw het polynoom $f = X^3 - 2X^2 - X + 1$ in $\mathbf{Q}[X]$.
(a) Bewijs dat f irreducibel is in $\mathbf{Q}[X]$.
Laat α een nulpunt zijn van f in $\mathbf{C}$. Gegeven is dat ook $\alpha^2 - 2\alpha$ een nulpunt is van f.
(b) Laat zien dat $-\alpha^2 + \alpha + 2$ een derde nulpunt is van f.
(c) Bepaal de Galoisgroep van f over $\mathbf{Q}$.
Laat g in $\mathbf{Q}[X]$ een irreducibel polynoom zijn met Galoisgroep isomorf aan die van f.
(d) Laat zien dat g graad 3 en drie reële nulpunten heeft.

Opgave 4. Zij K een lichaam en L een uitbreiding van K. Veronderstel dat L een nulpunt $\zeta \neq 1$ van het polynoom $X^7 - 1$ bevat.
(a) Bewijs dat het deellichaam $K(\zeta)$ van L een ontbindingslichaam is van $X^7 - 1$ over K.
(b) Bewijs dat de graad van $K(\zeta)$ over K een deler is van 6.
(c) Geef voor elke deler d van 6 een eindig priemlichaam K zodat de graad van een ontbindingslichaam van $X^7 - 1$ over K gelijk is aan d.

—SUCCES—