Hertentamen Algebra 3

8 juli 2013, 10:00–13:00

Je mag bij dit tentamen geen elektronische hulpmiddelen gebruiken. Wel toegestaan zijn boeken, syllabi en aantekeningen. Veel succes!

Opgave 1. Laat zien dat voor elk element $\beta \in \mathbf{C}$ de lichaamsuitbreiding $\mathbf{Q}(\beta^3) \subset \mathbf{Q}(\beta)$ graad 1, 2 of 3 heeft, en laat zien dat alle drie de mogelijkheden voorkomen.

Opgave 2. Laat p een priemgetal zijn en laat $x = y^p - y$ voor een element $y \in \mathbf{F}_{p^2}$. Bewijs: $x^2 \in \mathbf{F}_p$.

Opgave 3. (a) Laat zien dat $X^2 + X + 2$ en $X^2 - 2$ irreducibel zijn in $\mathbf{F}_5[X]$.
(b) Zij $K_1 = \mathbf{F}_5(\alpha)$ met $\alpha^2 + \alpha + 2 = 0$ en $K_2 = \mathbf{F}_5(\beta)$ met $\beta^2 - 2 = 0$. Geef een expliciet isomorfisme $\phi : K_1 \xrightarrow{\sim} K_2$. (Het is nodig en voldoende om $\phi(\alpha)$ te geven.)

Opgave 4. Zij $L = \mathbf{Q}(T_1, T_2, T_3, T_4)$ een zuiver transcendente uitbreiding van $\mathbf{Q}$, en vat de permutatiegroep S_4 van $\{T_1, T_2, T_3, T_4\}$ op als ondergroep van $\mathrm{Aut}(L)$. Schrijf $K = L^{S_4}$. Bepaal $[L : K(\alpha)]$ voor de volgende waarden van α:

(a) $\alpha = T_1 + T_2 + T_3 + T_4$;
(b) $\alpha = T_1 + T_2 + T_3$;
(c) $\alpha = T_1 + T_2$;
(d) $\alpha = T_1$.

Opgave 5. Voor $S \subset \{z \in \mathbf{C} : z^{11} = 1\}$ definiëren we $z_S = \sum_{s \in S} s$. Laat $\zeta \in \mathbf{C}$ een primitieve elfdemachtswortel zijn.

(a) Laat zien dat z_S construeerbaar is met passer en liniaal vanuit $\{0, 1\}$ als geldt

$$S = \{1, \zeta, \zeta^3, \zeta^4, \zeta^5, \zeta^9\}.$$

(b) Voor hoeveel van de 2^{11} deelverzamelingen S van $\{z \in \mathbf{C} : z^{11} = 1\}$ is z_S construeerbaar met passer en liniaal vanuit $\{0, 1\}$?