== Hertentamen Analyse 1 ==

Dinsdag 19 augustus 2008, 10.00-13.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille, O. van Gaans) en je studierichting.
- Geef niet alleen antwoorden, leg elke stap uit die je maakt.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.

1.) De functie f is gegeven door het voorschrift

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^2}{9+x^2}, & \text{voor } x \geq 0, \\ -\frac{x^2}{x+4}, & \text{voor } x < 0 \text{ en } x \neq -4. \end{cases}$$

(a) Toon aan, dat f continu is op $\mathbb{R} \setminus \{-4\}$.

(b) Bepaal de horizontale, scheve en vertikale asymptoot van f.

(c) Laat zien, dat f differentieerbaar is in 0 en dat $f'(0) = 0$.

(d) Bereken de afgeleide functie f' en geef diens domein.

(e) Bepaal de extremen van f (plaats, aard, grootte).

(f) Laat zien, dat f concaaf is op $[\sqrt{3}, \infty)$.

(g) Laat g de beperking zijn van de functie f tot het interval $[0, \infty)$. Beargumenteer dat g inverteerbaar is, bepaal het domein van g^{-1} en bereken een expliciete uitdrukking voor het functievoorschrift van g^{-1}.

2.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \tan(\frac{1}{n}), \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\sqrt[n]{5}}{n}.$$

Bepaal de convergentiestralen van de volgende machtreeksen:

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n+1}{n!} x^n, \qquad \text{(d)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^2 - 1}{2n^2 + n} \right)^n x^n.$$

***** Zie ommezijde voor vervolg *****

3.) Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal:

(a) $$\int_0^{1/2} \frac{8x^2 - x + 3}{(4x^2+1)(1-x)}\,dx,$$ (b) $$\int \frac{\ln(\ln x)}{x \ln x}\,dx,$$

(c) $$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \, dx.$$

4.) De functie $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \int_{x^2}^{x^3} \arctan(\ln t) dt.$$

(a) Beargumenteer, dat $f(x) \geq 0$ voor $x \in (0, \infty)$.
(*Hint: onderscheid de gevallen $x \geq 1$ en $0 < x < 1$.*)

(b) Beargumenteer, dat f differentieerbaar is op $(0, \infty)$ en bereken f'. Formuleer helder de gebruikte stelling(en).

(c) Laat zien, dat f een (globaal) minimum heeft in $x = 1$. Hoe groot is dit minimum?

5.) (a) Geef de Taylorreeks van $\sin x$ rond het punt $a = \frac{\pi}{2}$.

(b) Toon aan dat voor alle $x \in [0, \pi]$ geldt dat

$$0 \leq \sin x - 1 + \tfrac{1}{2}(x - \tfrac{\pi}{2})^2 - \tfrac{1}{24}(x - \tfrac{\pi}{2})^4 \leq \tfrac{1}{720}(x - \tfrac{\pi}{2})^6.$$

(c) Bereken

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}} \left(\frac{2}{1 - \sin x} - \frac{16}{(2x - \pi)^2} \right).$$

Opgave	1	2	3	4	5
Punten:	12 (1+2+2+1+2+2+2)	12 (3+3+3+3)	10 (4+3+3)	8 (3+3+2)	8 (2+3+3)