

# == Tentamen Analyse 1 ==

Maandag 12 januari 2009, 14.00-17.00u

---

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S. Hille of O. van Gaans) en je studierichting.
  - Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
  - Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
  - Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.
- 

1.) Bekijk de functie  $f: [-1, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door

$$f(x) = |x^3 - 3x^2|, \quad x \in [-1, \infty).$$

Bepaal plaats, aard en grootte van de extremen van  $f$ .

- 2.) Voor welke waarde(n) van  $c$  ( $c > 0$ ) snijden de ellips  $x^2 + 3y^2 = 2$  en de hyperbool  $x^2 - cy^2 = 1$  elkaar onder een rechte hoek?
- 3.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} 2^n, \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}.$$

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks:

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{n}{n+1} \right)^{n(n-1)} x^n.$$

4.) Bereken de volgende bepaalde, onbepaalde en oneigenlijke integraal:

$$(a) \int_1^2 x^3 \ln x \, dx, \quad (b) \int \frac{3x-5}{x^2-4x+3} \, dx,$$
$$(c) \int_0^{\infty} \frac{e^x}{e^{2x}+4} \, dx.$$

**\*\*\* Zie ommezijde voor vervolg \*\*\***

5.) Bekijk de functie  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

- (a) Toon aan dat  $f$  differentieerbaar is in 0 en bepaal  $f'(0)$ .
- (b) Is  $f$  continu in  $x = 0$ ? Beargumenteer!
- (c) Toon aan dat  $f$  strict stijgend is op  $\mathbb{R}$ .
- (d) Toon aan dat de functie  $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  gegeven door

$$G(x) = \int_0^x f(t^2) dt, \quad x \in \mathbb{R},$$

een buigpunt heeft in  $x = 0$ . Geef duidelijk aan welke stellingen je gebruikt.

- (e) Geef het derdegraads Taylorpolynoom van  $e^x$  rond 0 en geef een formule voor de Lagrange restterm.
- (f) Toon aan dat

$$0 \leq f(x) - 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 \leq \frac{e}{24}x^3 \quad \text{voor alle } x \in (0, 1].$$

- (g) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(|x|) - 1 - \frac{1}{2}|x|}{x^2}.$$

Opgave	1	2	3	4	5
Punten:	8	6	9	10	17
	(8)	(6)	(2+3+4)	(3+3+4)	(3+1+4+3+2+1+3)