

== Hertentamen Analyse 1 ==

Maandag 23 maart 2009, 14.00-17.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S.C. Hille, O. van Gaans) en je studierichting.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan; van een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vier** opgaven.

Succes!

1.) De functies $g_1: (-\infty, 0) \rightarrow \mathbb{R}$ en $g_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ worden gegeven door de voorschriften

$$g_1(x) = -xe^x, \quad g_2(x) = x \arctan x.$$

De samengestelde functie $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ wordt daarmee gedefinieerd door

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{voor } x < 0, \\ g_2(x), & \text{voor } x \geq 0. \end{cases}$$

- Toon aan dat f continu is.
- Is f differentieerbaar in 0? Beargumenteer het antwoord!
- Laat zien, dat
$$\lim_{x \rightarrow \infty} x(\arctan x - \frac{\pi}{2}) = -1.$$
- Bepaal de vergelijkingen van de horizontale en de scheve asymptoot van f .
- Bepaal de extremen van f op \mathbb{R} .
- Toon aan, dat f strikt stijgend is op $[0, \infty)$.
- Toon aan, dat f convex is op $[0, \infty)$.
- Laat zien, dat f een buigpunt heeft in 0, ondanks dat $f''(x)$ niet bestaat in 0.
- Bereken het tweede-orde Taylorpolynoom van f rond 1.

2.) Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integraal:

$$(a) \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{1 - \cos t}{\cos^2 t + 4} \sin t \, dt \quad (b) \int \frac{\ln x}{x^2} \, dx.$$

Bepaal of de volgende oneigenlijke integraal convergent of divergent is:

$$(c) \int_1^2 \frac{e^{\sin x}}{x-1} \, dx.$$

***** Zie ommezijde voor vervolg *****

3.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \left(e^{\frac{1}{n}} - 1 \right), \quad (b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{3}{n + \ln n}.$$

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks:

$$(c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{4^n} x^{2n}.$$

4.) Beschouw de functie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) := \int_0^{x^2} \sqrt{|\sin(t)|} dt.$$

- (a) Laat zien, dat $0 \leq f(x) \leq x^2$ voor alle $x \in \mathbb{R}$.
- (b) Formuleer de hoofdstelling van de integraalrekening.
- (c) Bereken de afgeleide functie f' .
- (d) Bereken

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

- (e) Toon aan, dat $f(x) \rightarrow \infty$ als $x \rightarrow \infty$.

Opgave	1	2	3	4
Punten:	13	8	9	10
	(2+1+2+2+2+1+1+1+1)	(3+3+2)	(3+3+3)	(2+2+2+2+2)