== Hertentamen Analyse 1 ==

Dinsdag 18 augustus 2009, 10.00-13.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.

Succes!

1.) De functie $f\colon \mathbb{R}\setminus\{-\frac{1}{2}\} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} 4(x^2-x)e^{-x}, & \text{voor } x \geq 0, \\ \dfrac{2x^2-10x-1}{4x+2}, & \text{voor } x < 0,\ x \neq -\frac{1}{2}. \end{cases}$$

(a) Is f differentieerbaar in 0? Beargumenteer het antwoord!

(b) Bepaal de vergelijkingen van de horizontale, verticale en scheve asymptoten van f.

(c) Bepaal de extremen van f. Geef aan of het lokale of globale maxima of minima zijn.

(d) Geef een schets van de grafiek van f.

(e) Toon aan dat f convex is op het interval $(-\frac{1}{2}, 0)$ en op het interval $(0, 1)$. Is f convex op het interval $(-\frac{1}{2}, 1)$? Beargumenteer het antwoord!

(f) Laat f_1 de beperking van f zijn tot het interval $(-\frac{1}{2}, 0)$. Toon aan dat f_1 inverteerbaar is en bepaal de inverse van f_1.

(g) Is f inverteerbaar? Beargumenteer het antwoord!

2.) Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integraal:

(a) $$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{24x^3+x^2+6x+1}{(4x^2+1)(x^2+1)}\,dx$$

(b) $$\int \sqrt{x}\arctan x\,dx.$$

*** Zie ommezijde voor vervolg ***

3.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$\text{(a)} \sum_{n=1}^{\infty} n \ln(1 + \tfrac{1}{n}), \qquad \text{(b)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 \sin^2(\frac{1}{n})}.$$

Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks:

$$\text{(c)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(n!)}{2^n} x^n.$$

4.) Voor een nader te bepalen constante $c \in \mathbb{R}$ is de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \int_0^{1/x} e^{-t^2} dt, & \text{voor } x > 0, \\ c, & \text{voor } x \leq 0. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat er een constante $c \in \mathbb{R}$ bestaat zo dat f continu is in $x = 0$.

(b) Formuleer de hoofdstelling van de integraalrekening.

(c) Beredeneer dat de functie f differentieerbaar is op $(0, \infty)$ en bereken de afgeleide $f'(x)$ voor $x \in (0, \infty)$.

(d) Toon met de regel van l'Hôpital aan dat f differentieerbaar is in $x = 0$ als c zo gekozen wordt als in (a).

5.) Van een oneindig vaak differentieerbare functie $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven dat g voldoet aan

$$(x^2 + 1)g'(x) - e^x g(x) = 0 \text{ voor alle } x \in \mathbb{R} \tag{1}$$

en

$$g(0) = 1 \text{ en } g'(0) = 1. \tag{2}$$

(a) Bereken $g''(0)$ en $g'''(0)$ uit (1) en (2).

(b) Geef het derdegraads Taylorpolynoom van g rond het punt $a = 0$.

Opgave	1	2	3	4	5	totaal
Punten:	18 (1+4+3+3+3+3+1)	12 (6+6)	14 (3+6+5)	10 (2+2+3+3)	6 (3+3)	60