== Tentamen Analyse 1 – W ==

Maandag 11 januari 2010, 14.00-17.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer en je studierichting.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Een (grafische) rekenmachine is toegestaan. Een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.

1.) Bekijk de functie $f\colon(-\infty,1)\to\mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{8-x^2}{x-2}, & x<0,\\[2ex] 2\ln(1-x)-4, & 0\le x<1.\end{cases}$$

(a) Toon aan dat f differentieerbaar is in $x=0$ en bepaal $f'(0)$.

(b) Is f continu in $x=0$? Beargumenteer!

(c) Bepaal de afgeleide functie f'.

(d) Toon aan dat f strict dalend is.

(e) Bepaal de vergelijkingen van de verticale en de scheve asymptoot van f.

2.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

$$\text{(a)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n},\qquad \text{(b)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\sin(n)\sin(\frac{1}{n^2}),\qquad \text{(c)}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(\frac{1}{2}n)^n}{\sqrt{n^n e^{n^2}}}.$$

3.) Bepaal de convergentiestraal van de volgende machtreeks:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\,+\,1}{2^n(n-1)!}x^n.$$

4.) Bereken de volgende onbepaalde, bepaalde en oneigenlijke integraal:

$$\text{(a)}\ \int\frac{4x+8}{x^3+4x}\,dx,\qquad \text{(b)}\ \int_0^{\pi/3}\ln(\cos x)\tan x\,dx,$$

$$\text{(c)}\ \int_1^{\infty}\frac{1}{x^2}\ln(1+x^2)\,dx.$$

***** Zie ommezijde voor vervolg *****

5.) Bekijk de functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \int_0^{x^2} e^{t^4}\, dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(a) Formuleer de hoofdstelling van de integraalrekening.

(b) Beredeneer dat f differentieerbaar is en laat zien, dat

$$f'(x) = 2xe^{x^8}.$$

(c) Toon aan dat f convex is.

(d) Bepaal

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^2}.$$

(e) Bepaal de Taylorreeks van f' rond $x = 0$.

(f) Bepaal de Taylorreeks van f rond $x = 0$.

(g) Toon aan, dat

$$f(x) \geq x^2 + \frac{x^{10}}{5} \quad \text{voor alle } x \in \mathbb{R}.$$

Opgave	1	2	3	4	5
Punten:	12 (3+1+2+3+3)	9 (3+3+3)	3	12 (4+4+4)	14 (2+2+2+2+2+2+2)