== Hertentamen Analyse 1 – W ==

Maandag 22 maart 2010, 14.00-17.00u

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer, de naam van de docent (S.C. Hille, O. van Gaans) en je studierichting.
- Elk antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan; van een formuleblad niet. Bedenk wel, dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat!
- Dit tentamen bestaat uit **vijf** opgaven.

Succes!

1.) De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door het voorschrift

$$f(x) = \begin{cases} \ln(1+2x) - \ln x, & \text{voor } x \geq 1, \\ \dfrac{x^2 \ln 3}{2-x}, & \text{voor } x < 1. \end{cases}$$

(a) Toon aan dat f continu is op $\mathbb{R}$.

(b) Is f differentieerbaar in 1? Beargumenteer het antwoord!

(c) Bepaal de vergelijkingen van de horizontale en de scheve asymptoot van f.

(d) Toon aan, dat f strikt stijgend is op $[0,1]$ en strikt dalend op $[1,\infty)$.

(e) Bepaal de extremen van f op $\mathbb{R}$ (aard, plaats en grootte).

(f) Toon aan, dat f convex is op $[1,\infty)$.

(g) Bereken het tweede-orde Taylorpolynoom van f rond 2.

2.) Beargumenteer of de volgende reeksen voorwaardelijk convergent, absoluut convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen je daarbij gebruikt!

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sqrt{n}\, \sin\Big(\frac{1}{n}\Big)$, (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}}$, (c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos n}{n^2 \arctan n}$.

3.) Bepaal de convergentiestraal van de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}\, x^n.$$

***** Zie ommezijde voor vervolg *****

4.) Bereken de volgende bepaalde en onbepaalde integraal:

(a) $$\int_1^3 \sqrt{x}\arctan(\sqrt{x})\,dx$$ (b) $$\int \frac{x^2-x+27}{x^3+9x}\,dx.$$

Bereken de volgende oneigenlijke integraal:

(c) $$\int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{1-e^{-x}}}dx.$$

5.) De functie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is gegeven door

$$f(x) := \int_{e^{-x}}^{e^x} \frac{1}{1+|\ln t|}\,dt.$$

(a) Beargumenteer dat de integraal die $f(x)$ definieert, bestaat voor iedere $x \in \mathbb{R}$.

(b) Formuleer de hoofdstelling van de integraalrekening.

(c) Concludeer dat f differentieerbaar is op $\mathbb{R}$ en bereken de afgeleide functie $f'(x)$.

(d) Bereken

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}.$$

(e) Toon aan, dat

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty.$$

(i.e., $f(x) \to \infty$ als $x \to \infty$).

Opgave	1	2	3	4	5
Punten:	15 (2+2+2+2+3+2+2)	9 (3×3)	4	12 (3×4)	10 (5×2)