Toets Analyse 1

Maandag 18 oktober 2010, 10:00-12:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **vijf** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, dat van een formulekaart niet. Bedenk wel dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat.

1.) Bepaal de volgende limieten (bij onderdeel (b) is enige creativiteit vereist):

(a) $\lim_{x\to\infty} x\left(\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}\right)$,

(b) $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x^4)}{(\sin x)^4}$.

2.) Bekijk de functie $f\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+5}{x+6}, & x \le -1, \\[2ex] \dfrac{x-3}{x-4}, & -1 < x < 3, \\[2ex] \dfrac{x-3}{4-x-2\sqrt{x^2-8}}, & x \ge 3. \end{cases}$$

(a) Is f continu in $x=-1$? Beargumenteer!

(b) Toon aan dat f differentieerbaar is in $x=3$.

(c) Is f continu in $x=3$? Beargumenteer!

3.) (a) Bekijk de functie $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ gegeven door

$$f(x) = \frac{x^2+1}{x^2+2}, \quad x \ge 0.$$

Gegeven is hier dat f injectief ("1-1") is op zijn domein en dat het bereik van f het half-open interval $[\frac{1}{2},1)$ is. Bepaal een expliciete formule voor de inverse functie $f^{-1}:[\frac{1}{2},1)\to\mathbb{R}$ van f.

(b) Bekijk de functie $g:(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})\to\mathbb{R}$, gegeven door

$$g(x) = x + \tan x, \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Er geldt dat $g(\frac{\pi}{4}) = \frac{\pi}{4}+1$. Gegeven is hier dat g injectief ("1-1") is op zijn domein en $\mathbb{R}$ als bereik heeft, zodat de inverse functie $g^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ gedefinieerd is. Gegeven is verder dat g^{-1} differentieerbaar is in $\frac{\pi}{4}+1$. Bereken de afgeleide $(g^{-1})'(\frac{\pi}{4}+1)$.

Zie ommezijde

4.) De kromme K in $\mathbb{R}^2$ is gegeven door de vergelijking

$$x - \sin\left(x^2 + y\right) + \sin\left(x + y^2\right) = 0.$$

Gegeven is hier, dat voldoende dicht bij het punt $(0, 1)$ de kromme K de grafiek is van een differentieerbare functie ϕ, die gedefinieerd is op een klein open interval dat 0 bevat. Bereken een vergelijking voor de raaklijn aan de grafiek van ϕ in het punt $(0, 1)$.

5.) (a) Toon met behulp van de Middelwaardestelling (of een geschikt gevolg daarvan) aan dat

$$\sin(x) \leq x \qquad \text{voor alle } x \geq 0$$

en

$$1 - \cos(x) \leq \frac{1}{2}x^2 \qquad \text{voor alle } x \geq 0.$$

(b) Toon aan dat

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x\sqrt{x}} = 0.$$

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	7 (4+3)	9 (3+4+2)	8 (4+4)	7 (7)	9 (5+4)	40