Tentamen Analyse 1

Maandag 21 maart 2011, 14:00-17:00 uur

- Schrijf op ieder vel je naam en studentnummer.
- Er zijn **vijf** opgaven. Vergeet de achterkant niet!
- Ieder antwoord dient gemotiveerd te worden met een (korte) berekening, redenering of verwijzing naar de theorie.
- Het gebruik van een (grafische) rekenmachine is toegestaan, dat van een formulekaart niet. Bedenk wel dat exacte antwoorden worden gevraagd, tenzij anders vermeld staat.

1.) De functie f heeft als domein de vereniging van de intervallen $(-\infty, 1)$ en $(1, \infty)$ en is daar gegeven door het voorschrift

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{x-1}, & \text{voor } x \leq -1, \\[2ex] \dfrac{2x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}}{x-1}, & \text{voor } x > -1,\ x \neq 1. \end{cases}$$

(a) Is f continu in -1? Beargumenteer het antwoord.

(b) Bepaal de afgeleide van f op zijn domein, behalve in het punt $x = -1$.

(c) Is f differentieerbaar in -1? Beargumenteer het antwoord.

(d) Toon aan dat f strikt dalend is op $(-\infty, -1]$.

(e) Bepaal alle extrema van f op zijn domein. Geef niet alleen plaats en grootte, maar vermeld ook of het om een maximum of een minimum gaat en of het betreffende extremum lokaal of globaal (absoluut) is.

(f) Bepaal alle asymptoten (horizontaal, verticaal, schuin) van f.

2.) Beargumenteer of de volgende reeksen absoluut convergent, voorwaardelijk convergent of divergent zijn. Geef duidelijk aan welke stellingen gebruikt worden.

(a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n^2+1}\right),$$

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{n}{n^2+1}\right),$$

(c)

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-1}{e}\right)^n \frac{n-1}{n+1}.$$

$\boxed{\textbf{Zie ommezijde}}$

3.) Bepaal de verzameling van alle x waarvoor de machtreeks

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2+1}{2^n(n+1)} x^n$$

convergeert.

4.) Bereken de volgende bepaalde dan wel onbepaalde integralen:

(a)

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin x}{1+4\cos^2 x}\, dx,$$

(b)

$$\int x \arctan x \, dx,$$

(c)

$$\int_0^1 \frac{x^2+6x+12}{(x+2)(x+3)(x+4)}\, dx.$$

5.) Laat K de kromme in het vlak zijn, gedefinieerd door:

$$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\cos y + xy = 1\}.$$

Er bestaan (dit hoeft niet bewezen te worden) een open interval I dat 1 bevat en een door K impliciet gedefinieerde oneindig vaak differentieerbare functie $f : I \to \mathbb{R}$, met $f(1) = 0$, zodanig dat $(x, f(x))$ op de kromme K ligt, voor alle x in I.

(a) Bepaal $f'(1)$.

(b) Bepaal het tweede orde Taylorpolynoom van f in 1.

Opgave:	1	2	3	4	5	Totaal
Punten:	25 (3+3+4+3+7+5)	21 (5+10+6)	7 7	24 (8+8+8)	13 (7+6)	90

Cijfer = (Totaal aantal punten)/9.